

SÉGUNDA PARTE

ALGEBRA

Comencemos esta parte de nuestras lecciones citando algunas obras de Algebra para que el lector pueda orientarse en la copiosa literatura que sobre esta disciplina matemática existe. Primeramente, debemos mencionar el *Cours d'Algebre*, de Serret, obra de gran mérito, y que durante mucho tiempo ha sido de gran utilidad. Hoy contamos en Alemania con dos grandes obras, muy conocidas: H. Weber, *Lehrbuch der Algebra* (1) y E. Netto, *Vorlesungen über Algebra* (2), compuestas cada una de dos tomos; ambas encierran un gran número de cuestiones difíciles y han sido escritas para servir de consulta, por la extensión y detalle con que aparece expuesta la materia; si bien para las exigencias de la preparación de los aspirantes al magisterio se nos figuran demasiado voluminosas y también algo caras. Más apropiadas a este objeto son las *Vorlesungen über Algebra*, de E. Bauer (3), obra escrita, además, con un estilo eminentemente didáctico y en la que apenas se trata más materia de la que el maestro debiera dominar (4). Atendiendo al lado práctico de la resolución numérica de ecuaciones, podría completarse este libro con el manual *Praxis der Gleichungen*, del profesor C. Runge (colección Schubert, tomo XIV, Leipzig, 1900), digno de todo encomio.

Antes de entrar de lleno en materia, debemos advertir que no puede pretenderse dentro del cuadro de estas lecciones dar una

(1) 2.^a ed. Braunschweig, 1898-99.

(2) Leipzig, 1896-99.

(3) 2.^a ed. Leipzig, 1910.

(4) Véase también Netto, E., *Elementare Algebra*, Leipzig, 1913, y H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, edición reducida en un tomo, Braunschweig, 1921.

exposición sistemática del Algebra; antes, por el contrario, nuestro propósito es tratar solamente una sección especial de la misma, a nuestro entender poco apreciada, pero que es de suma importancia por la relación íntima que guarda con la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Todas mis explicaciones girarán en torno de este punto, a saber: **la aplicación de los métodos gráficos y en general de los métodos geoméricamente intuitivos a la resolución de las ecuaciones.**

Bajo este título se designa un capítulo de extraordinaria amplitud y lleno de fecundas enseñanzas, del cual sólo entresacaremos una serie de las más interesantes cuestiones que se relacionan con las distintas regiones de la matemática, tratando de formar así un todo orgánico, de modo que en adelante sigamos el método que antes hemos designado con el nombre de *proceso B*.

Trataremos, primero, de las ecuaciones entre magnitudes reales, y después, seguiremos con las que contienen magnitudes complejas.

I. ECUACIONES DE COEFICIENTES Y RAICES REALES

1.º Ecuaciones con un parámetro

Empecemos por el caso más sencillo, el de una ecuación que contiene un parámetro; su tipo es:

$$f(x, \lambda) = 0.$$

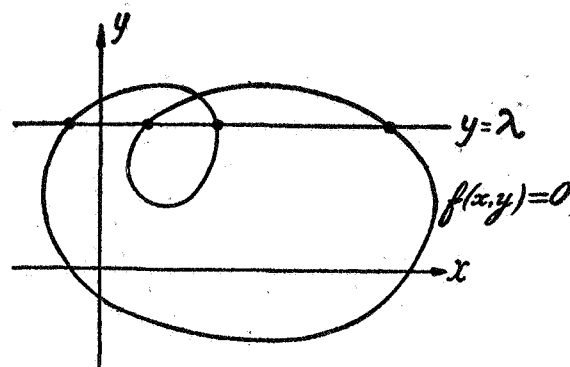


Figura 15

Para interpretarla geoméricamente del modo más sencillo, sustituyamos el parámetro λ por una segunda variable y ; se tiene, entonces, la ecuación:

$$f(x, y) = 0,$$

que es la de una *curva en el plano xy* (fig. 15). Los puntos de intersección de esta curva con la *recta $y=1$, paralela al eje x* , dan las raíces reales de la ecuación $f(x, \lambda) = 0$; y si se ha dibujado la curva aproximadamente, lo cual es fácil cuando no se necesita demasiada exactitud, se ve que al trasladar dicha recta consér-

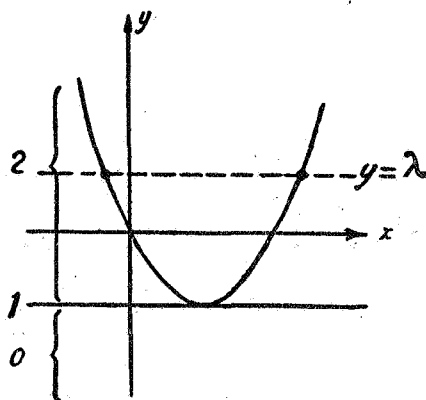


Figura 16

vándose paralela al eje x , o sea al variar el parámetro λ , el número de las raíces reales cambia. Es digno de especial mención el caso en que $f(x, \lambda)$ es lineal en λ , es decir, cuando la ecuación se presenta bajo la forma

$$\varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0,$$

pues entonces la curva $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ es racional, y por consiguiente se simplifica mucho su trazado. En estos casos se pueden aplicar muchas veces con fruto los métodos de resolución numérica aproximada de ecuaciones.

Consideremos, por ejemplo, la *ecuación cuadrática*

$$x^2 + ax - \lambda = 0.$$

Tenemos, entonces, una *parábola* $y=x^2+ax$ (fig. 16), y veamos ahora, para qué valores de λ la ecuación tiene 2, 1 o ninguna raíces reales, que corresponden a las horizontales que cortan a la curva en 2, 1 o ningún puntos. La realización de estas construcciones tan sencillas e intuitivas resulta muy conveniente en las clases superiores de la enseñanza secundaria.

Como segundo ejemplo, tomemos la *ecuación cúbica*

$$x^3+ax^2+bx-\lambda=0;$$

para ella consideramos la *parábola cúbica* $y=x^3+ax^2+bx$; que, según los valores de a y b , tiene formas diferentes. En la figura 17 se ha supuesto que la ecuación $x^3+ax^2+b=0$ tiene raíces

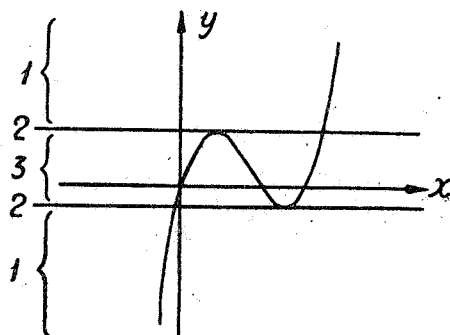


Figura 17

reales; se ve, entonces, cómo las paralelas al eje x se dividen en dos grupos: uno el de las que cortan a la curva en un punto; otro el formado por las que la cortan en tres, separado uno de otro por dos paralelas límites, en las cuales aparece un punto de intersección equivalente a dos puntos comunes, que corresponde a una raíz doble.

2.º Ecuaciones con dos parámetros

Pasemos ahora al caso en que la ecuación contiene más de un parámetro, comenzando por el caso de dos; su resolución gráfica requiere entonces mayor habilidad; en cambio los resultados que se obtienen son de mayor interés y transcendencia.

Nos limitaremos en lo que sigue a la consideración de ecuaciones en que figuren *linealmente los dos parámetros* λ y μ ; y designaremos por t la incógnita; trátase, pues, ahora, de la determinación de las raíces reales de la ecuación

$$\varphi(t) + \lambda\chi(t) + \eta\psi(t) = 0 \tag{1}$$

en la que φ , χ y ψ expresan polinomios en t .

Si x e y son las coordenadas cartesianas de los puntos de un plano, sabido es que toda recta del mismo está representada (figura 18) por una ecuación

$$y + ux + v = 0, \tag{2}$$

donde podemos mirar a u y v como coordenadas de la recta: $-u$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con

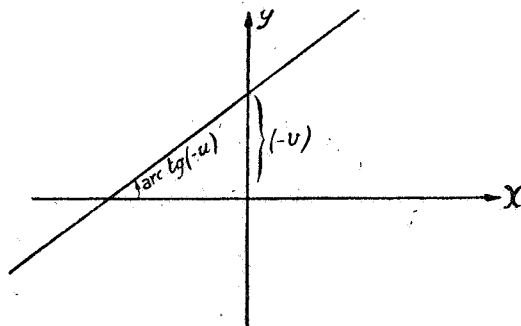


Figura 18

el eje x , y $-v$ es el segmento que determina sobre el eje y .

Si, por razones cuya importancia veremos más adelante, consideramos como equivalentes el punto y la recta y en consecuencia las coordenadas de estos dos elementos geométricos, podremos decir brevemente que *la ecuación* $y + ux + v = 0$, *representa la incidencia de la recta* (u, v) *y del punto* (x, y) , es decir, el punto está sobre la recta y la recta pasa por el punto.

Para poder interpretar geoméricamente la ecuación (1) pongámosla en la forma (2), lo cual puede realizarse de dos modos esencialmente distintos:

A) Pongamos:

$$y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad x = \frac{\chi(t)}{\psi(t)} \quad (3a)$$

$$u = \lambda, \quad v = \mu \quad (3b)$$

Las ecuaciones (3a) representan con la variable t una curva racional, perfectamente determinada, del plano xy , la llamada curva normal de la ecuación (1); y puesto que cada uno de sus puntos viene dado por un cierto valor de t , se puede considerar marcada sobre la misma una escala de valores de t . De la (3a) podemos deducir inmediatamente cuantos puntos queramos de la curva y dibujar ésta con su escala con la suficiente exactitud.

Para todo par de valores de los parámetros λ y μ , las ecuaciones (3b) representan una recta del plano, y la (1) significa, según lo antes expuesto, que el punto t de la curva normal se halla sobre esta recta; obtenemos, por consiguiente, todas las raíces reales de la (1) cuando consideramos todos los puntos de intersección de la curva normal con las rectas del plano, y leemos los valores del parámetro t sobre la escala de la curva.

Obsérvese que la curva normal queda determinada de una vez para todas por la ecuación (1), sin que hayan de tenerse en cuenta para nada los valores que puedan tomar los parámetros λ y μ . A cada ecuación con valores determinados de λ y μ corresponde entonces una recta que, en cierto modo, los representa, y al considerar todos los pares de valores de λ y μ aparecen todas las rectas del plano y no, como en el caso de un parámetro, sólo las paralelas al eje x .

Para aclarar bien esto, fijémonos en el caso de la ecuación cuadrática.

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

La curva normal es ahora

$$y = t^2, \quad x = t, \quad \text{o sea} \quad y = x^2$$

es decir, la parábola representada en la figura 19, en cuya escala marcada se pueden leer inmediatamente las raíces reales de la ecuación como intersecciones con las rectas $y + \lambda x + \mu = 0$. Así la

figura indica que las raíces de $t^2 - t - 1 = 0$ se hallan entre $\frac{2}{3}$ y 2, y entre $-\frac{1}{2}$ y -1 , respectivamente. La principal ventaja de este método, respecto del aplicado en el caso anterior, es que aquí

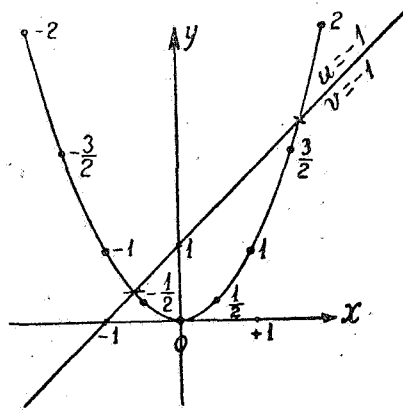


Figura 19

con una sola parábola dibujada se pueden resolver todas las ecuaciones cuadráticas posibles.

Por consiguiente, cuando haya que resolver aproximadamente diversas ecuaciones cuadráticas, este procedimiento será recomendable.

Análogamente se pueden tratar todas las ecuaciones cúbicas, las cuales, como es bien conocido, se pueden llevar siempre, por una transformación lineal, a la forma reducida :

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

Aquí aparece como curva normal la parábola cúbica (fig. 20)

$$y = t^3, \quad x = t \quad \text{o} \quad y = x^3$$

También este método me parece muy a propósito para su empleo en la enseñanza toda vez que los alumnos encuentran gusto en el dibujo de tales curvas.

B) El segundo método de interpretación de la ecuación (1) se deduce del primero aplicando el Principio de dualidad, es decir, permutando las coordenadas de puntos por las de rectas.

Para ello, escribamos la ecuación (2) cambiando el orden de sus términos :

$$v + xu + y = 0$$

e identifiquémosla con la (1), escribiendo :

$$v = \frac{\varphi(t)}{\phi(t)}, \quad u = \frac{\chi(t)}{\phi(t)} \quad (45 a)$$

$$x = \lambda, \quad y = \mu. \quad (45 b)$$

Las ecuaciones (4 a) representan, considerando t como variable, un haz de rectas, que envuelve una curva bien determinada, la *curva normal* de la ecuación (1) en la nueva interpretación ;

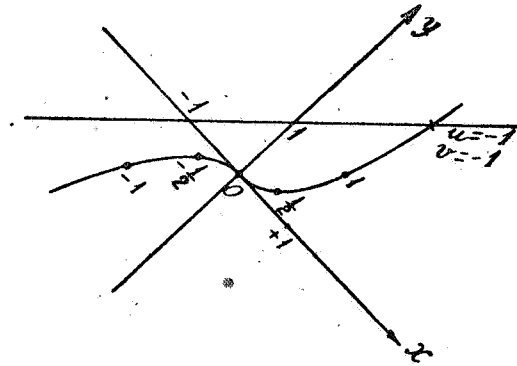


Figura 20

es una *curva racional*, puesto que en coordenadas de rectas o tangenciales está representada por funciones racionales de un parámetro. Cada tangente y, por consiguiente, también su punto de contacto corresponde a un determinado valor de t ; así que de nuevo se obtiene una *escala sobre la curva normal*. Dibujando un número suficientemente grande de tangentes, utilizando las ecuaciones (4 a) se llega a obtener la curva y la escala con toda la exactitud deseada.

Para un par de valores determinados de (λ, μ) , la ecuación (1) expresa que la tangente t a la curva normal (4 a) pasa por el punto de coordenadas (λ, μ) ; por consiguiente, *se obtienen todas las raíces reales de la (1), leyendo los valores del parámetro t , corres-*

pendientes a todas las tangentes a la curva normal trazadas por el punto (λ, μ) .

Para aclarar esto consideremos nuevamente los mismos ejemplos. A la ecuación cuadrática

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

corresponde como curva normal la envolvente del haz de rectas

$$v = t^2, \quad u = t,$$

y se tiene de nuevo una parábola con el vértice en el origen de coordenadas (fig. 21).

La figura pone de manifiesto inmediatamente las raíces reales

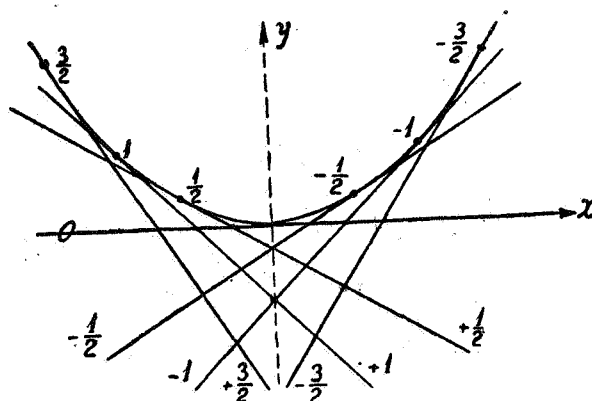


Figura 21

que correspondan al par (λ, μ) , como parámetros de las tangentes trazadas desde el punto (λ, μ) a la parábola.

Para la *ecuación cúbica*

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

la curva normal

$$v = t^3, \quad u = t$$

es una *curva de tercera clase* que tiene un punto de retroceso en el origen de coordenadas, como indica la figura 22.

Otro modo un poco diferente de exposición de este método, es el siguiente: consideremos la *ecuación trinomia*

$$t^m + \lambda t^n + \mu = 0;$$

el haz tangencial que envuelve a la curva normal está entonces representado por la ecuación

$$f(t) = t^m + xt^n + y = 0$$

que contiene el parámetro t . Para hallar la ecuación de la curva normal en coordenadas puntuales, bastará, como es sabido, eliminar el parámetro t entre esta ecuación y la que se obtiene derivándola con respecto al mismo; pues la curva normal, como envolvente del sistema de rectas, es lugar geométrico de los pun-

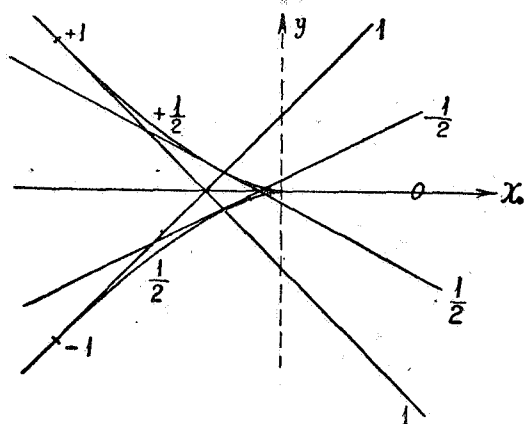


Figura 22

tos de intersección de cada dos rectas sucesivas (correspondientes a t y $t+dt$). En lugar de eliminar, resolvamos el sistema constituido por ambas ecuaciones respecto a x e y : se obtiene así

$$x = -\frac{m}{n} t^{m-n}, \quad y = \frac{m-n}{n} t^m,$$

ecuaciones paramétricas de nuestra curva normal.

De este modo se obtienen para ecuaciones de las curvas nor-

males en los ejemplos ya tratados de las ecuaciones cuadrática y cúbica, respectivamente, las

$$\begin{aligned} x &= -2t, & y &= t^2; \\ x &= -3t^2, & y &= 2t^3, \end{aligned}$$

que, en efecto, corresponden a las curvas dibujadas.

El profesor *Runge* ha mostrado en sus conferencias y ejercicios lo práctico de estos métodos, *especialmente apropiados para la solución real de las ecuaciones*. También en la enseñanza se

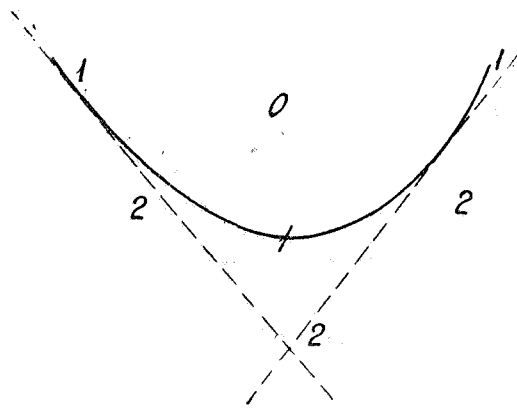


Figura 23

podrá recomendar la consideración de una u otra de estas figuras.

Comparando, ahora, los dos métodos que acabamos de exponer, aparece el segundo mucho más ventajoso que el primero para este objeto concreto, pero muy importante: *cuando se quiere obtener una representación intuitiva de todas las ecuaciones de un tipo determinado que tienen un número dado de raíces reales*. Tales conjuntos vienen representados en el primer método por *sistemas de rectas*; en el segundo, por *regiones de puntos*; y éstas, por el modo de ser de nuestra intuición geométrica o por la costumbre, se conciben más fácilmente que aquéllas.

Lo que en este sentido puede lograrse, se advierte fijándose en un caso concreto; por ejemplo, el de la ecuación cuadrática. En él observamos que por ningún punto interior a la parábola (fig. 23) se pueden trazar tangentes a la misma; en tanto que por

los puntos exteriores se le pueden trazar dos tangentes; así que estas dos regiones representan los conjuntos de todas las ecuaciones cuadráticas con ninguna o con dos raíces reales, respectivamente. Para todos los puntos de la parábola, hay sólo una tangente, la cual puede mirarse como doble, resultando, pues, la curva normal como el lugar de los puntos para los cuales las dos raíces de las ecuaciones correspondientes se confunden en una, de tal modo que podríamos llamar a la curva, *curva discriminante*.

En la ecuación cúbica, por cada punto interior a la curva normal pasan tres tangentes a la misma (fig. 24); pues para un

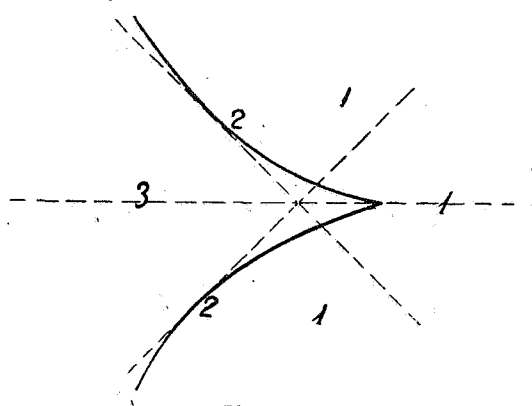


Figura 24

punto del eje, por razón de simetría, es evidente, y cuando se hace variar el punto sin atravesar la curva, este número no puede cambiar. Si el punto (x, y) llega a la curva, las dos raíces coinciden en una y cuando el punto pasa a la región exterior a la curva, las dos raíces se hacen imaginarias y sólo queda una raíz real.

Según esto, la porción de plano interior a la curva representa todas las ecuaciones cúbicas con tres raíces reales distintas; la exterior, las ecuaciones que sólo tienen una raíz real; y, finalmente, los puntos de la curva, las ecuaciones con dos raíces reales, una simple y otra doble. Por el punto de retroceso de la curva, sólo pasa una tangente, que debe contarse como triple; la ecuación correspondiente ($t^3=0$) sólo tiene una raíz triple real.

La figura permite ver con una simple ojeada este agrupamiento.

Las figuras llegan a ser todavía mucho más sugestivas y reportan más enseñanza, cuando, como es corriente en el Álgebra, se introducen limitaciones para las raíces; en particular, si se trata de encontrar todas las raíces reales contenidas en un intervalo dado $t_1 \leq t \leq t_2$. Este problema está resuelto de modo general por el teorema de Sturm, como se sabe. Podemos completar fácilmente las figuras construídas, para que den una solución satisfactoria y clara a esta cuestión. Para ello agregamos a la curva normal las tangentes correspondientes a los parámetros t_1 y t_2 , y consideraremos las regiones en que dividen al plano.

Hagamos esto, primero, para la ecuación cuadrática; viene, entonces, a reducirse el problema a determinar el número de las tangentes que tocan el arco de parábola comprendido entre los puntos t_1 y t_2 (fig. 25). En el triángulo formado por dicho arco

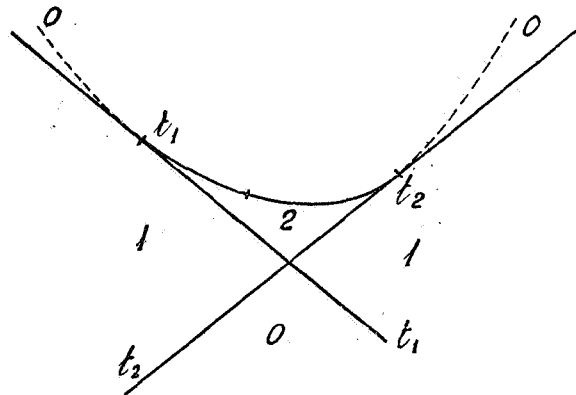


Figura 25

y las tangentes en los puntos t_1 y t_2 están los puntos por los cuales se puedan trazar dos tangentes a la parábola. Si atravesamos una de las tangentes t_1 , t_2 , se pierde una tangente, la que toca a la parábola fuera de aquel arco. Por cada punto de las regiones limitadas por los arcos ilimitados de la parábola, a partir de t_1 y t_2 , y las prolongaciones de las tangentes en estos puntos, no pasa ninguna tangente al arco (t_1, t_2) , y en el interior de la parábola no hay tangentes reales. Los dos arcos de parábola $t \leq t_1$ y

$t > t_2$ son inútiles para la división del plano considerada ; quedan, por lo tanto, solamente las líneas trazadas en la figura, las cuales nos dan, con los números marcados, una idea intuitiva exacta sobre los conjuntos de ecuaciones cuadráticas que tienen dos, una o ninguna raíces reales comprendidas entre t_1 y t_2 .

Exactamente de la misma manera se procede con la ecuación cúbica. Supongamos que $t_1 > 0$, $t_2 < 0$. Tracemos las tangentes en los puntos correspondientes a estos valores del parámetro y consideremos la división del plano por estas rectas y el trozo de curva comprendido entre los puntos t_1 y t_2 (fig. 26).

Por los puntos interiores al cuadrilátero mixtilíneo que tiene un vértice en el punto de retroceso de la curva, pasan tres tan-

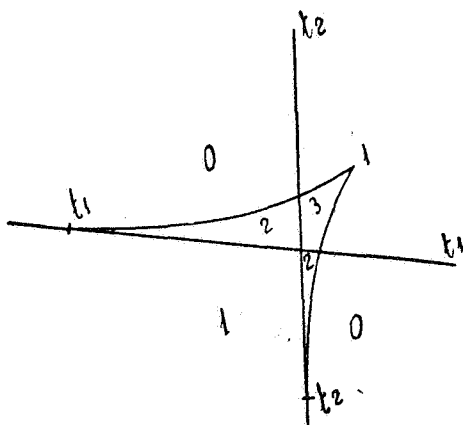


Figura 26

gentes reales, que tocan al arco comprendido entre t_1 y t_2 ; pero cuando se atraviesa cualquiera de las tangentes t_1 o t_2 se pierde una solución, y al atravesar la curva normal se pierden dos, como se aprecia inmediatamente en la figura. Resulta, pues, la división del plano indicada en la figura, en las regiones que corresponden a ecuaciones con tres, dos, una o ninguna raíces reales situadas entre t_1 y t_2 .

Para comprender bien la grandísima utilidad de los métodos gráficos bastará intentar la clasificación de las ecuaciones cúbicas de un modo abstracto, sin apelar para nada a la intuición geométrica ; esto exige un tiempo relativamente desproporcio-

nado. Aun la demostración que aquí aparece clara sin más que contemplar la figura, resultaría complicada.

En lo que respecta a la *relación de estos métodos geométricos con los conocidos criterios algebraicos de Sturm, Descartes y Budan-Fourier*, debemos solamente observar que para el caso que nos ocupa, el método geométrico comprende a todos aquéllos. Para más detalles puede el lector consultar mi trabajo (1) *Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen* en el *Katalog mathematischer Modelle*, de W. Dycks (2). Es digno de recomendar este catálogo, que fué confeccionado con ocasión de la Exposición organizada por la Sociedad Matemática Alemana en Munich, en el año 1893, y constituye todavía hoy el mejor medio auxiliar para orientarse en la construcción de modelos matemáticos.

3.º Ecuaciones con tres parámetros

Para terminar el estudio que venimos haciendo, vamos a ver cómo pueden aplicarse las mismas consideraciones a las ecuaciones con tres parámetros; la única variación será que *en lugar del plano*, habremos de utilizar *el espacio tridimensional*. Bastará para ello, fijarnos en la *ecuación cuatrinómica particular*

$$t^p + \lambda t^m + \mu t^n + \nu = 0 \quad (1)$$

y el procedimiento que para ella sigamos se aplica inmediatamente a cualquiera otra.

Además de la ecuación propuesta (1) deberemos tener en cuenta la condición fundamental de la Geometría del espacio para que el punto (x, y, z) se halle sobre el plano de coordenadas tangenciales (u, v, w) :

$$z + ux + vy + w = 0 \quad (2)$$

o

$$w + xu + yv + z = 0 \quad (3)$$

Identifiquemos esta ecuación fundamental, puesta en una o en otra forma (2) o (3), con la (1), para obtener, exactamente como antes, dos interpretaciones mutuamente correlativas.

Pongamos, en primer lugar,

$$z=t^p, \quad x=t^m, \quad y=t^n; \quad (2a)$$

obtenemos entonces una curva alabeada determinada, la curva normal de la ecuación cuatrinómica, con una escala de valores de t . Si, además, consideramos el plano determinado por los valores

$$u=\lambda, \quad v=\mu, \quad w=\nu, \quad (2b)$$

la ecuación (1) nos dice que las raíces reales de la ecuación propuesta son idénticas a los valores del parámetro de los puntos reales de intersección de la curva normal (2a) con el plano (2b).

Procediendo, ahora, correlativamente, los valores

$$w=t^p, \quad u=t^m, \quad v=t^n \quad (3a)$$

representan un sistema simplemente infinito de planos, los cuales pueden considerarse como osculadores de una curva alabeada determinada, con una escala de valores del parámetro t , que, atendida esta definición mediante coordenadas tangenciales, podemos llamarla *curva normal tangencial*, en oposición a la antes definida como lugar de puntos, que la llamaremos *curva normal puntual*. Considerando ahora, al mismo tiempo que la curva normal tangencial, el punto

$$x=\lambda, \quad y=\mu, \quad z=\nu, \quad (3b)$$

vemos que las raíces reales de (1) son idénticas a los parámetros de los planos osculadores a la curva normal tangencial (3a), que pasan por el punto (3b).

Resulta interesante ver verificadas ambas interpretaciones intuitivamente por medio de ejemplos concretos; en la colección del Seminario Matemático de la Universidad de Gotinga, hay dos modelos que vamos a describir.

La primera representación la ha utilizado el profesor Mehmke, de Stuttgart, en la construcción de un aparato para la resolución numérica de ecuaciones.

Consiste en una plataforma circular de latón (fig. 27) sobre la cual se apoyan tres varillas verticales graduadas, equidistantes

entre sí, y en la que se coloca recortada la curva normal tipo de las ecuaciones de tercero, cuarto o quinto grado con cuatro términos. Para la construcción y uso de este aparato, no se utilizan ya las coordenadas cartesianas rectangulares, sino *un sistema coordenado en el que las coordenadas tangenciales*, es decir, los

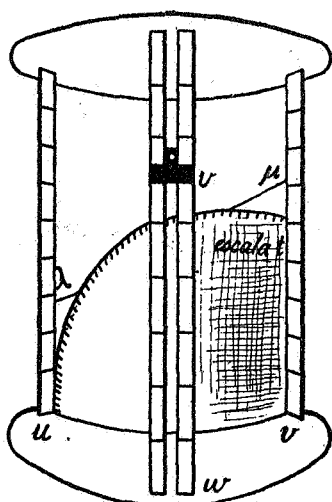


Figura 27

coeficientes (u, v, w) de la ecuación del plano puesta en la forma (2), son, precisamente, los números que corresponden a las intersecciones del plano en cuestión con las escalas de las tres varillas verticales, números que se pueden leer en éstas.

Para fijar la posición de un plano determinado $u=\lambda$, $v=\mu$, $w=\nu$, lleva la varilla anterior, w , una alidada que se puede fijar en el punto ν de la escala, mientras se unen por un hilo que se mantiene tirante los puntos λ y μ de las escalas u y v . Los rayos que pasan por la alidada dirigidos hacia este hilo forman nuestro plano y se puede observar inmediatamente por el agujero de la alidada las intersecciones del plano con la curva normal, como intersecciones aparentes del hilo con la curva recortada; los valores de sus parámetros son las raíces buscadas de la ecuación, los cuales se leen simultáneamente sobre la escala grabada sobre la curva normal recortada. En cuanto al valor realmente práctico del aparato que queda descrito, depende, naturalmente, en últi-

mo término, del mayor o menor esmero de su construcción mecánica.

Para el *segundo método*, hay un modelo construido por el señor *Hartenstein* y presentado como trabajo práctico en su examen de Estado. Este aparato se refiere a la llamada *forma reducida de la ecuación de cuarto grado*:

$$t^4 + \lambda t^2 + \mu t + \nu = 0 \quad (4)$$

a la cual puede reducirse, como se sabe, toda ecuación bicuadrática. Refiriéndonos a esta ecuación vamos a exponer aquel método, un poco modificado, como ya hicimos antes al tratar de la ecuación de tres parámetros (pág. 133).

Consideramos ahora un sistema simplemente infinito de planos, cuyas coordenadas tangenciales están dadas por los valores (3a); por consiguiente, sus ecuaciones puntuales serán en este caso:

$$f(t) = t^4 + xt^2 + yt + z = 0$$

La *superficie envolvente* de estos planos puede considerarse formada por el conjunto de las rectas que cada plano $f(t)=0$ tiene común con el infinitamente próximo $f(t+\Delta t)=0$; es, pues, la *superficie desarrollable*, cuya ecuación se obtiene por eliminación de t entre las ecuaciones $f(t)=0$ y $f'(t)=0$.

Pero, para obtener, ahora, la *curva normal*, debemos considerar la *del haz de planos*, es decir, el lugar de todos los puntos de concurso de cada tres planos consecutivos; la cual, como se sabe, es la *arista de retroceso de la superficie desarrollable*, cuyos puntos tienen como coordenadas las funciones de t que se deducen de las tres ecuaciones $f(t)=0$, $f'(t)=0$, $f''(t)=0$. En nuestro caso, estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} t^4 + xt^2 + yt + z &= 0, \\ 4t^3 + x \cdot 2t + y &= 0, \\ 12t^2 + x \cdot 2 &= 0, \end{aligned}$$

de las que resulta:

$$x = -6t^2, \quad y = 8t^3, \quad z = -3t^4 \quad (5)$$

ecuaciones puntuales paramétricas de la curva normal de la ecuación dada; sus ecuaciones tangenciales, según (3 a), son :

$$w = t^4, \quad u = t^2, \quad v = t. \quad (6)$$

Ambas representaciones son de cuarto grado en t ; la curva normal es, por consiguiente, de cuarto orden y cuarta clase.

Para formarnos más clara idea de esta curva, consideremos algunas superficies que la contienen. Primeramente, las expresiones (5) satisfacen idénticamente a la ecuación :

$$z + \frac{x^2}{12} = 0,$$

esto es, la curva normal de que tratamos está contenida en la superficie del cilindro parabólico de segundo orden representado por esta ecuación y cuyas generatrices son paralelas al eje y . Igualmente satisfacen los valores de x , y a la ecuación :

$$\frac{y^2}{8} + \frac{x^3}{27} = 0,$$

de modo que también este cilindro cúbico, de generatrices paralelas al eje z , pasa por la curva normal, que es la intersección completa propia de ambos cilindros. Se puede fácilmente dibujar, según esto, una perspectiva aproximada de la curva normal (fig. 28). Esta es alabeada, simétrica respecto del plano xz , y con un retroceso en el punto O .

También pasa por la curva la superficie de segundo grado :

$$\frac{xz}{9} - \frac{3y^2}{64} = 0$$

puesto que esta ecuación se satisface por las (5) idénticamente en t . De ella y de la del cilindro cúbico se deduce por combinación lineal esta otra :

$$\frac{xz}{6} - \frac{y^2}{16} - \frac{x^3}{216} = 0,$$

la cual representa una superficie de tercer orden que pasa por la curva normal.

Consideremos, ahora, la *superficie desarrollable* cuya arista de retroceso es la curva normal; podemos definirla como el *conjunto de todas las tangentes de ésta*. Si su representación paramétrica es:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

las tangentes en el punto t están dadas por las ecuaciones,

$$x = \varphi(t) + \rho\varphi'(t), \quad y = \psi(t) + \rho\psi'(t), \quad z = \chi(t) + \rho\chi'(t),$$

donde ρ es un parámetro, pues sus cosenos directores respecto de los ejes son, como se sabe, proporcionales a las derivadas res-

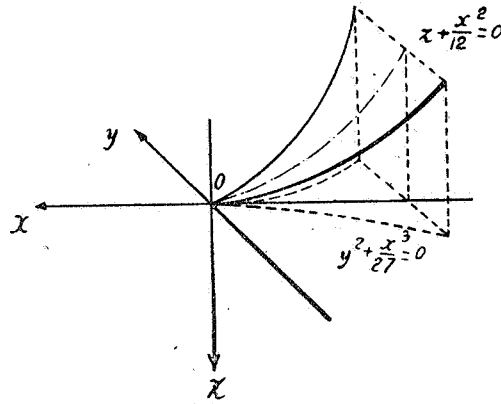


Figura 28

pecto a t de las coordenadas de la curva. Considerando t como variable, estas ecuaciones con los dos parámetros t , ρ representan la superficie desarrollable. Todo esto, como se ve, no son más que consideraciones bien sabidas de la Geometría del espacio. En particular, en el caso de la curva (5) las ecuaciones de su superficie tangencial, designando las coordenadas de sus puntos por X , Y , Z para distinguirlas de las coordenadas de la curva, son:

$$X = -6(t^2 + 2\rho t), \quad Y = 8(t^3 + 3\rho t^2), \quad Z = -3(t^4 + 4\rho t^3). \quad (7)$$

Esta superficie es la contenida en el modelo del señor Hartenstein, en el cual las generatrices rectilíneas están representadas por hilos tirantes (véase la figura 29, pág. 146).

La representación paramétrica es la que mayores ventajas presenta para el estudio y la construcción material de la superficie. Realmente, lo que ordinariamente hacemos al tratar de encontrar la *ecuación de la superficie*, es seguir la costumbre de antiguo adquirida; se obtiene sin más que eliminar t y ρ entre las ecuaciones (7).

Indicaremos el procedimiento más sencillo para ello, sin descender a grandes pormenores, pero fijándonos en la significación de las diferentes operaciones necesarias para la eliminación. De las ecuaciones (7) se deducen estas otras:

$$Z + \frac{X^2}{12} = 12\rho^2 t^2,$$

$$\frac{XZ}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216} = 8\rho^3 t^3,$$

que se satisfacen por todos los puntos de la curva misma ($\rho=0$). Poniendo 0 en lugar de los segundos miembros, se obtienen las ecuaciones de dos superficies particulares, ya consideradas antes, que contienen la curva. Entre ambas ecuaciones se puede eliminar fácilmente el producto ρt , y se encuentra como *ecuación de la superficie desarrollable*:

$$\left(Z + \frac{X^2}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{XZ}{6} - \frac{Y^2}{12} - \frac{X^3}{216}\right)^2 = 0,$$

que es, por consiguiente, una superficie de sexto orden, que se descompone en una de quinto orden más el plano del infinito.

Sobre la significación de esta fórmula vamos a agregar todavía las observaciones siguientes, que interesarán a los lectores más familiarizados con este asunto. Las expresiones que se hallan dentro de los dos paréntesis no son otra cosa que *los invariantes de la ecuación bicuadrática escrita en forma reducida*,

$$t^4 + Xt^2 + Yt + Z = 0,$$

los cuales desempeñan un papel muy importante en la teoría de las funciones elípticas, en la cual se designan generalmente con g_2 y g_3 . El primer miembro de la ecuación de la superficie $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, es conocido con el nombre de *discriminante de*

la ecuación bicuadrática y su anulación indica la existencia de una raíz doble. Nuestra superficie desarrollable no es otra, por lo tanto, que la superficie discriminante de la ecuación bicuadrática, es decir, el lugar de los puntos para los cuales la ecuación tiene una raíz doble.

Después de estas explicaciones teóricas, la construcción de un modelo filar de éstos, como una superficie, no ofrece ninguna dificultad de principio; se realiza determinando por medio de la representación paramétrica los puntos en los cuales las tangentes que se desea representar atraviesan ciertos planos fijos, representados en el modelo por superficies de madera o cartón p. ej., y uniendo por medio de hilos bien tensos los puntos correspondientes. Para lograr un modelo realmente bello y útil, en que se vea bien representada la superficie con su arista de retroceso, se necesitan muchos ensayos y una gran habilidad. La figura 29 representa la superficie con sus rectas; AOB es la arista de retroceso.

En el modelo se ve una *curva doble* (COD), a lo largo de la cual se atraviesan las dos hojas de la superficie; es simplemente la parábola situada en el plano XZ :

$$Y = 0, \quad Z - \frac{X^2}{4} = 0.$$

De esta parábola solamente aparece una parte (CO), para la cual es $X < 0$, como intersección de las hojas reales; la otra mitad estaría *aislada en el espacio*. Este fenómeno no sorprenderá a quien esté acostumbrado a utilizar representaciones geométricas concretas en la Teoría de las superficies algebraicas, puesto que es cosa corriente que aparezcan *ramas reales de curvas dobles* tanto como *intersecciones de hojas reales como aisladas* en el espacio; en este caso son intersecciones reales de hojas imaginarias de la superficie, lo cual corresponde a lo que acontece en el plano, que al lado de los puntos dobles reales que aparecen como intersecciones de ramas reales de una curva, existen puntos dobles, aparentemente aislados, como intersecciones de partes imaginarias.

Veamos ahora *qué enseñanzas podemos sacar de la superficie obtenida con su arista de retroceso, la curva normal*. Imaginemos esta curva provista de su escala, o mejor, escribamos en

cada tangente representada por un hilo tirante el valor de su parámetro, t , que también corresponde a su punto de contacto. Dada, entonces, una ecuación bicuadrática con coeficientes determinados x, y, z , bastará trazar por el punto correspondiente (x, y, z) los planos osculadores a la curva normal, o, lo que es lo mismo, los planos tangentes a la superficie discriminante y los parámetros de los puntos de contacto con la curva o de las

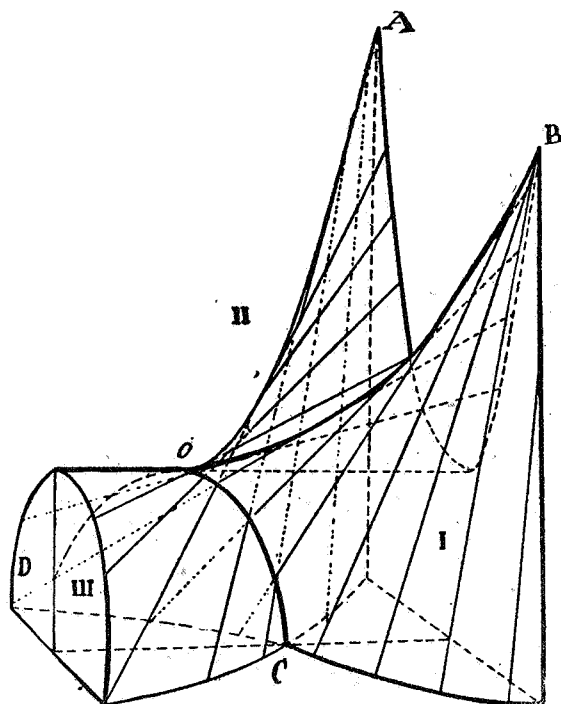


Figura 29

tangentes respectivas dan las raíces reales de la ecuación. Puesto que los planos osculadores tocan y cortan a la curva, proyectando ésta desde el punto (x, y, z) considerado, todo punto de contacto de un plano osculador será punto de inflexión aparente de la curva, y recíprocamente. Las raíces reales de la ecuación bicuadrática son, por lo tanto, en suma, los parámetros de los puntos de inflexión aparentes de la curva normal, vista desde el punto (x, y, z) .

Claro es que a los no familiarizados con el estudio de las curvas alabeadas les es muy difícil reconocer con exactitud en un modelo los planos osculadores y los puntos de inflexión aparentes; pero aun éstos apreciarán con toda claridad en el modelo el siguiente importantísimo punto: *la clasificación de todas las ecuaciones bicuadráticas atendiendo al número de sus raíces reales*. Veamos los casos que pueden presentarse:

Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ las cuatro raíces de la ecuación bicuadrática real (4); desde luego, por anularse el coeficiente de t^3 , necesariamente es $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. En cuanto a la realidad de estas raíces, evidentemente pueden ocurrir los tres casos principales siguientes:

I. *Cuatro raíces reales.*

II. *Dos raíces reales y dos imaginarias conjugadas.*

III. *Dos pares de raíces imaginarias conjugadas.*

Si tenemos dos ecuaciones del tipo I con las raíces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, respectivamente, se puede hacer pasar de un modo continuo del conjunto de valores α, β, γ y δ a los α', β', γ' y δ' , respectivamente, mediante sistemas de valores reales diferentes de cero y de suma nula; en concordancia con ese paso, se transforma una ecuación en la otra mediante un sistema continuo de ecuaciones del mismo tipo; es decir, todas las ecuaciones del tipo I forman un continuo conexo; y lo mismo se dice para las de los otros dos tipos. *En nuestro modelo se muestra esto descomponiéndose el espacio en tres partes conexas, cuyos puntos corresponden a las ecuaciones de cada uno de los tipos enunciados.*

Consideremos ahora los *casos límites entre estos tres tipos*:

Del tipo I se pasa al II por ecuaciones que tienen *dos raíces reales diferentes y una real contada como doble* (es decir, *dos raíces confundidas*), lo que expresaremos simbólicamente por $2_1 + (2)$. Entre los tipos II y III hay el caso límite de *una raíz real doble y dos raíces complejas*, lo que puede indicarse por (2) . *A ambos tipos deben corresponder en nuestra figura del espacio trozos de la superficie discriminante, la cual representa, en general, todas las ecuaciones con raíces confundidas, y en efecto, razonando como anteriormente, se ve que a cada uno de estos tipos límites corresponde un trozo simplemente conexo de la*

superficie. De cada uno de estos dos grupos $2+(2)$ y (2) se pasa al otro por el caso de dos raíces dobles reales; simbólicamente: $(2)+(2)$. Los puntos para los cuales vienen a confundirse dos pares de raíces, tienen que pertenecer simultáneamente a dos hojas de la superficie discriminante, y, por consiguiente, a la rama no aislada de su curva doble. Según esto, la superficie discriminante se compone de dos partes separadas por una rama de la curva doble, de las cuales una, $2+(2)$, separa las regiones del espacio I y II, y la otra, (2) , las regiones II y III.

Para ver ahora la posición de la curva normal, observemos que, por ser arista de retroceso, en cada uno de sus puntos hay tres planos tangentes reales que coinciden en uno (el plano osculador), de modo que representan el caso de una raíz triple y una simple, ambas reales: $1+(3)$; este caso solamente puede derivarse del $2+(2)$, cuando una de las raíces simples llega a ser igual a la raíz doble, de donde se sigue que la arista de retroceso debe estar contenida por entero en la primera parte, $2+(2)$, de la superficie. Sólo en el punto de retroceso de la arista de retroceso $(0, 0, 0)$, se da el caso de una raíz cuádruple real, el cual puede originarse por coincidencia de las dos raíces dobles reales del caso $(2)+(2)$. Y en efecto, el punto $(0, 0, 0)$ de retroceso de la arista de retroceso también está en la curva doble. Por último, en lo que respecta a la rama aislada de la curva doble, está contenida completamente en la parte del espacio III y se distingue porque cada dos de las raíces complejas allí existentes se comprenden en una raíz doble compleja: ambas raíces dobles son, naturalmente, conjugadas.

El lector puede ver todos los casos posibles, aquí enumerados, realizados exactamente en nuestro modelo. En el dibujo (página 146) forma el interior de la superficie a la derecha de la curva doble la parte del espacio I; el de la izquierda, la parte III; y el exterior, la parte II.

Según esto, puede formarse el siguiente cuadro esquemático, en el que aparecen el número y la multiplicidad de las raíces reales que corresponden a los puntos de las diferentes partes del espacio, de la superficie y de las curvas. En él, los números no encerrados en paréntesis indican el número de raíces reales sim-

ples, y el orden de multiplicidad de una raíz se representa por un número entero entre paréntesis :

Regiones del espacio :	I	II	III
Raíces reales :	4	2	0
Superficie discriminante :	$\underbrace{\quad 2 + (2) \quad}_{} \quad \underbrace{\quad (2) \quad}_{} \quad \downarrow$		
Curva normal :	$\underbrace{\quad 1 + (3) \quad}_{} \quad \downarrow$		
Curva doble :	$\underbrace{\quad (2) + (2) \quad (2 \text{ res. imag. dobles}) \quad}_{} \quad \downarrow$		
Retroceso :	$\underbrace{\quad (4) \quad}_{} \quad \downarrow$		

II. ECUACIONES EN EL CAMPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Prescindimos ahora de la restricción de no considerar más que magnitudes reales y vamos a ocuparnos en lo que sucede en el campo más amplio de las magnitudes complejas, limitándonos, naturalmente, a hacer resaltar aquello que mejor puede verse intuitivamente mediante las representaciones geométricas. Comenzaremos por el teorema más importante del Algebra :

A. Teorema fundamental del Algebra

Este teorema se enuncia diciendo que *toda ecuación algebraica de grado n tiene, en general, n raíces, o, dicho con más precisión, que todo polinomio en z de grado n puede descomponerse en n factores lineales.*

En el fondo, todas las demostraciones de este teorema utilizan la interpretación geométrica de los números complejos mediante los puntos del plano. Vamos a indicar aquí *las líneas generales de la primera demostración de Gauss, del año 1799*, a la cual se le puede dar un ropaje geométrico, aunque claro es que la primitiva exposición de Gauss es muy diferente de ésta.

Sea el polinomio

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

que podemos escribir así :

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde u y v designan polinomios de las dos variables reales x e y . El pensamiento fundamental de la demostración de Gauss estriba en el estudio de las dos curvas del plano xy :

$$u(x, y)=0, \quad v(x, y)=0$$

probando que tienen, por lo menos, un punto común; para este punto de intersección (x, y) se tiene $f(x+iy)=0$, y con ello queda demostrada la existencia de una raíz de la ecuación $f(z)=0$. Para tal estudio de las curvas se ve que es suficiente investigar cómo se comportan en el infinito, es decir, a distancias tan grandes como se quiera del punto origen.

Cuando el valor absoluto, r , de z , llega a ser muy grande, se puede despreciar en $f(z)$ las potencias de z de orden inferior respecto a z^n ; pasando, entonces, de las coordenadas cartesianas, x, y , a las polares, r y φ , es decir, poniendo

$$z=r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

será, según la fórmula de Moivre,

$$Z^n=r^n(\cos n \varphi + i \operatorname{sen} n \varphi)$$

y esta fórmula da el valor al cual se aproxima asintóticamente $f(z)$; y de él se deduce que u y v se aproximan asintóticamente a las funciones

$$r^n \cos n \varphi \quad \text{y} \quad r^n \operatorname{sen} n \varphi,$$

respectivamente; y, por consiguiente, el comportamiento de estas curvas $u=0$ y $v=0$ a distancia suficientemente grande del punto cero está representado en una primera aproximación por

$$\cos n \varphi=0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n \varphi=0,$$

respectivamente.

Ahora bien, la línea $\operatorname{sen} n \varphi=0$ está constituida por las n rectas que forman con el eje x los ángulos $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}$, mientras que la línea $\cos n \varphi=0$ está formada por las n bisec-

trices de los ángulos que forman cada dos consecutivas de aquellas rectas. (En la figura 30 está representado el caso de estas dos líneas para $n=3$).

En la parte central de la figura, las verdaderas curvas $u=0$ y $v=0$ pueden, naturalmente, diferir mucho de estas rectas; pero siempre, a medida que las curvas van alejándose se aproximan cada vez más a dichas rectas. Podemos representarnos esquemá-

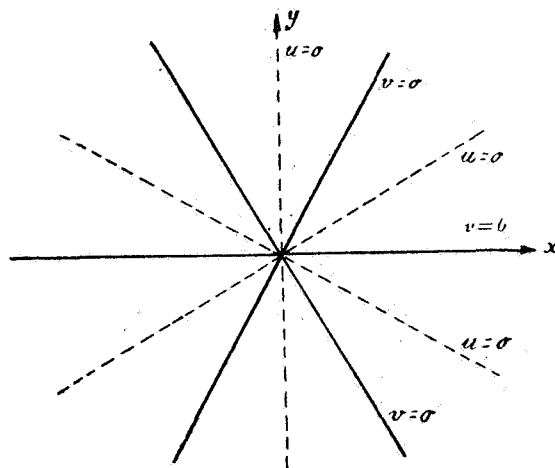


Figura 30

ticamente la marcha de las curvas considerando que fuera de un círculo cuyo centro es el punto cero y de radio muy grande aquellas rectas están fijas y a ellas se unen las ramas infinitas de estas curvas.

Es completamente indiferente cómo sean tales curvas dentro del círculo; las ramas infinitas de u , v , tendrán que aparecer siempre alternándose (fig. 31) al suponer recorrida la figura alrededor del origen de coordenadas; y, por consiguiente, es intuitivamente evidente que en el interior de dicho círculo ambas curvas tendrán que cortarse una vez por lo menos. Y, en efecto, se puede llegar con todo rigor a esta conclusión—y en esto estriba precisamente el contenido de la demostración de Gauss—utilizando las propiedades relativas a la continuidad de las curvas, pero lo esencial del procedimiento demostrativo está en lo que acabamos de decir. Una vez que se ha logrado así poner de manifiesto una raíz, se

puede separar de $f(z)$ un factor lineal y aplicar el teorema al polinomio de grado $n-1$ que resulta ; y continuando de este modo, se llega, como queríamos, a la *descomposición de $f(z)$ en n factores lineales, o sea, a la demostración de la existencia de n raíces.*

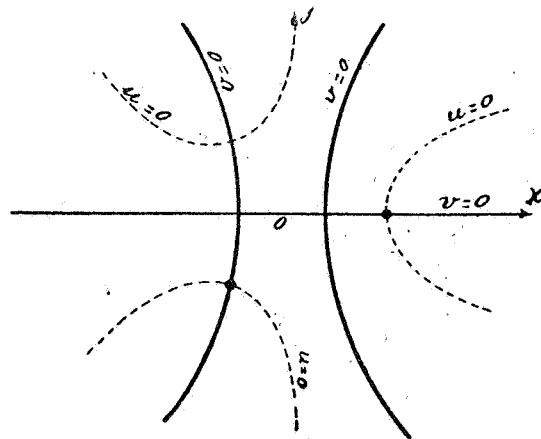


Figura 31

Para aclarar bien lo que acabamos de expresar, consideremos un ejemplo particular muy sencillo. Sea

$$f(z) = z^3 - 1 = 0 ;$$

entonces es

$$u = r \cos 3\varphi - 1, \quad v = r^3 \sin 3\varphi,$$

así que $v=0$ se compone de tres rectas (fig. 32) mientras $u=0$ tiene tres ramas hiperbólicas. Se ven, en efecto, en la figura las tres intersecciones de estas curvas, las cuales corresponden a las tres raíces de la ecuación dada. Es muy recomendable la ejecución de otros ejemplos más complicados.

Como no se trata aquí de una exposición sistemática del Algebra, nos limitamos en lo que respecta al teorema fundamental a estas breves indicaciones, que terminamos haciendo notar que *la importancia de los números complejos en el Algebra* estriba, precisamente, en que dan un carácter de absoluta generalidad, sin restricción ninguna, al teorema fundamental ; en cambio, si

nos concretásemos a los números reales, sólo podríamos afirmar que una ecuación de grado n tiene n raíces, o menos, o ninguna.

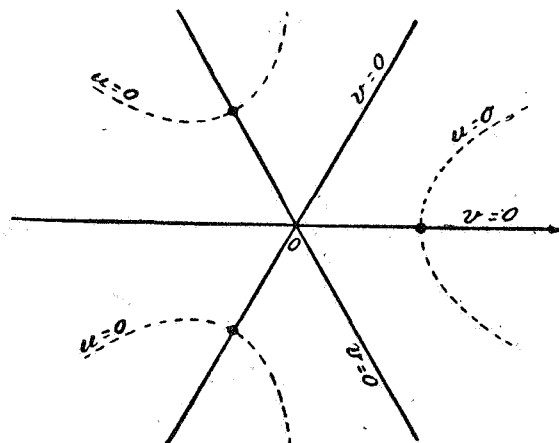


Figura 32

B. Ecuaciones con un parámetro complejo

En lo que resta del Algebra, vamos a ocuparnos en *discutir de un modo intuitivo todas las soluciones (incluso las complejas) de las ecuaciones complejas*, de modo análogo a lo hecho con las soluciones reales de las ecuaciones reales, concretándonos a las *ecuaciones con un parámetro complejo*, y aun supondremos que éste sólo aparece *linealmente*, y veremos cómo, en tal caso, se obtiene el resultado apetecido *estudiando una sencilla representación conforme*.

Sean $z=x+iy$ la incógnita y $w=u+iv$ el parámetro; el tipo de la ecuación que vamos a estudiar será, pues,

$$\varphi(z) - w \psi(z) = 0 \quad (1)$$

siendo φ y ψ polinomios en z ; designaremos por n el mayor exponente de z que aparece en estos polinomios. Según el teorema fundamental, para cada valor determinado de w la ecuación tiene n raíces, en general, distintas. Recíprocamente, de la (1) se deduce,

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \quad (2)$$

es decir, w es una función racional de z que—siguiendo una locución corriente—diremos que es de grado n . Si quisiéramos emplear como equivalente geométrico de la ecuación (1) la representación conforme que por medio de esta función se establece entre los planos complejos de las z y de las w , se presentaría el inconveniente de la multiformidad de z considerada como función de w ; evitaremos tal inconveniente procediendo como suele hacerse en la teoría de funciones: imaginaremos el plano w de n hojas colocadas unas encima de otras y enlazadas entre sí de modo conveniente por puntos de ramificación, constituyendo así una SUPERFICIE DE RIEMANN de n hojas, como es sabido desde las primeras nociones de la teoría de las funciones algebraicas. Entonces la función considerada establece una correspondencia unívoca y conforme entre los puntos de la superficie de Riemann y los del plano w , por un aparte, y con los del plano liso de las z , por otra.

Antes de pasar a un estudio completo de esta representación conviene establecer algunos convenios que permitan eludir las excepciones derivadas de la consideración de valores infinitos de w y de z y con ello enunciar todos los teoremas en forma que sean válidos sin excepción. Mas, como estos convenios no se utilizan de un modo tan general como fuera de desear, vamos a decir unas pocas palabras sobre ellos. No puede satisfacernos en este punto hablar sencillamente de un punto indefinidamente lejano, del plano complejo, pues de esta manera se pierde completamente la representación concreta y después habría que razonar para cada caso particular con el fin de ver lo que corresponde en un punto infinitamente lejano a una propiedad determinada de un punto a distancia finita; pero, en cambio, obtenemos el resultado apetecido si, de una vez para siempre, reemplazamos el plano de Gauss, como representante de los números complejos, por la «esfera de Riemann».

Para ello, consideramos una esfera de radio 1, tangente al plano de Gauss en el punto cero, S , que tomaremos como polo Sur, y efectuamos la proyección estereográfica sobre el plano desde el polo Norte, N (fig. 33).

A cada punto $Q(x, y)$ del plano corresponde unívocamente el segundo punto de intersección del rayo NQ con la esfera; y re-

cíprocamente, a cada punto P de la esfera—con excepción del N —corresponde un solo punto, Q , de coordenadas finitas (x, y) ; podemos, por lo tanto, considerar a P como imagen o representación del número $x+iy$.

Si el punto P se mueve sobre la esfera tendiendo hacia N , el punto Q se mueve en el plano complejo alejándose infinitamente, y recíprocamente.

Parece, pues, natural, considerar este punto N , que no corresponde a ningún número complejo finito, como representante único de todas las magnitudes infinitas $x+iy$, es decir, como representación concreta del punto infinitamente lejano del plano

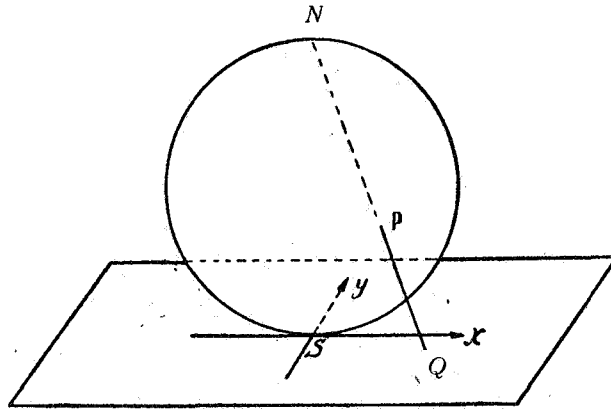


Figura 33

de Gauss, introducido con carácter puramente simbólico, y designarlo siempre con el símbolo ∞ . Con esto se logra una representación geométrica en la que todos los puntos, propios o impropios, desempeñan el mismo papel, y, por tanto, no hay que distinguir unos de otros en los razonamientos.

Volviendo ahora a la interpretación geométrica de la ecuación algebraica [1] sustituiremos el plano w , por una esfera w ; entonces, la función [2] establece una representación de la esfera z sobre la esfera w ; y esta representación, como los de los planos z y w , es conforme, puesto que, según se sabe, la proyección estereográfica del plano sobre la esfera también lo es. En esta representación, a un punto de la esfera w corresponderán, en general, n diferentes puntos de la esfera z ; para lograr una co-

respondencia *unívoca*, imaginaremos, análogamente a lo hecho en el plano, n esferas w superpuestas una sobre otra y enlazadas entre sí por los puntos de ramificación, de manera que constituyan una *superficie de Riemann esférica de n hojas*.

Esta concepción no tiene mayor dificultad que de la de una superficie de Riemann sobre el plano. *Con ella la ecuación algebraica [1] representa geoméricamente una correspondencia unívoca y conforme de la superficie de Riemann sobre la esfera w por una parte y de la esfera sencilla z por otra*, y en esta interpretación están evidentemente incluidos los valores infinitos de z y w , ya se correspondan entre sí o con valores finitos.

Para hacer uso de este recurso geométrico auxiliar, hay que realizar en el Algebra cosa análoga a la antes hecha con el fin de evitar las excepciones que la consideración del infinito introduce en las fórmulas; esto se logra con la introducción de las variables homogéneas, poniendo

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

y considerando z_1 y z_2 como dos variables complejas independientes, que se conservan finitas y no pueden anularse simultáneamente.

A todo valor determinado de z corresponde entonces un sistema de infinitos valores ($c \cdot z_1, c \cdot z_2$) en los que c es un factor constante arbitrario; todos los sistemas de valores (cz_1, cz_2) que sólo difieren en un factor constante se consideran, por consiguiente, como un mismo «punto» en el campo de las dos variables homogéneas. Recíprocamente, a cada uno de estos puntos corresponde un valor determinado, z , con la sola excepción del punto en que z_1 es arbitrario y $z_2=0$, que no corresponde a ningún valor finito, z ; sino que cuando otro punto tiende a confundirse con él, el valor correspondiente de z crece infinitamente. Resulta, pues, que este punto debe considerarse como equivalente aritmético de un punto del infinito del plano z , y, análogamente, del representado con el símbolo ∞ en la esfera.

De la misma manera escribiremos, naturalmente,

$$w = \frac{w_1}{w_2}$$

y estableceremos las ecuaciones «homogéneas» entre las variables homogéneas z_1, z_2 y w_1, w_2 que corresponden a la ecuación [2], la cual, cuando se multiplican los términos del quebrado por z_2^n se transforma en esta otra :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_2^n \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{z_2^n \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\varphi(z_1, z_2)}{\psi(z_1, z_2)}; \quad (3)$$

donde $\varphi(z_1, z_2)$ y $\psi(z_1, z_2)$ son funciones racionales ENTERAS de z_1 y z_2 , puesto que $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ contienen el quebrado $z = \frac{z_1}{z_2}$ elevado, a lo sumo, a la n potencia ; son, pues, *polinomios homogéneos (formas) de dimensión n* , pues cada factor z^i de $\varphi(z)$ y de $\psi(z)$ se convierte después de la multiplicación en el

$$z_2^n \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^i = z_2^{n-i} z_1^i$$

de dimensión n .

Con esto podemos pasar ya, haciendo aplicación de los dos recursos: la representación sobre la esfera compleja y las variables homogéneas, a estudiar la dependencia funcional que la ecuación establece entre z y w , con todas sus particularidades. Tal problema quedará resuelto en cuanto podamos darnos una perfecta idea de la representación conforme entre la esfera de las z y la superficie de Riemann sobre la esfera w .

Ante todo conviene ver la naturaleza y situación de los puntos de ramificación de la superficie de Riemann; recordaremos, para ello, que un punto de ramificación de orden μ es un punto tal que en él se unen $\mu+1$ hojas de dicha superficie. Puesto que w es una función uniforme de z , conoceremos los puntos de ramificación cuando conozcamos los puntos correspondientes a ellos en la esfera de las z , a los que, en adelante, llamaremos siempre puntos notables (*) de la esfera z . También a ellos corresponde una cierta multiplicidad, igual a la del punto de ramificación co-

(*) Traducimos así frecuentemente la denominación *merkwürdige* o *be-merkenswerte Punkte*, usada por el autor, en lugar de emplear la más usual de *puntos singulares*.

respondiente. Nos limitaremos a enunciar los teoremas que resuelven estas cuestiones sin exponer sus demostraciones completas; puesto que corresponden a propiedades elementales de la teoría de funciones ya familiares al lector, aun cuando no lo sean utilizando las variables homogéneas que aquí preferimos. Todas las consideraciones abstractas que ahora vamos a hacer, las aplicaremos más tarde a una serie de ejemplos concretos, en los que tendrán forma intuitiva concreta.

Empecemos por un pequeño cálculo, para obtener lo que *corresponde al cociente diferencial* $\frac{dw}{dz}$ *en coordenadas homogéneas*. Diferenciando la ecuación [3] resulta:

$$\frac{w_2 dw_1 - w_1 dw_2}{w_2^2} = \frac{\phi d\varphi - \varphi d\phi}{\phi^2} \quad [3']$$

siendo

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_1 dz_1 + \varphi_2 dz_2 \\ d\phi &= \phi_1 dz_1 + \phi_2 dz_2 \end{aligned}$$

y representando, para abreviar, por

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\partial \varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, & \varphi_2 &= \frac{\partial \varphi(z_1, z_2)}{\partial z_2}, \\ \Psi_1 &= \frac{\partial \phi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, & \Psi_2 &= \frac{\partial \phi(z_1, z_2)}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, según el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas, tenemos

$$\varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2 = n \varphi, \quad \phi_1 z_1 + \phi_2 z_2 = n \phi;$$

por consiguiente, el segundo miembro de la [3'] se convierte en:

$$\phi d\varphi - \varphi d\phi = \begin{vmatrix} d\varphi & d\phi \\ \varphi & \phi \end{vmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} \varphi_1 dz_1 + \varphi_2 dz_2 & \phi_1 dz_1 + \phi_2 dz_2 \\ \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2 & \phi_1 z_1 + \phi_2 z_2 \end{vmatrix}$$

que, según el teorema de multiplicación de determinantes, puede escribirse:

$$= \frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

La ecuación [3'] se convierte, pues, en esta otra :

$$\frac{w_2 dw_1 - w_1 dw_2}{w_2^2} = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{n \cdot \psi^2} (\varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2),$$

que es la *fórmula fundamental de la teoría homogénea de la ecuación* [2] ; en la que interviene el *determinante funcional de las formas* φ y ψ , expresión de uso muy frecuente en lo que sigue.

Salvo este factor, el segundo miembro es la diferencial de $z = \frac{z_1}{z_2}$, el primer miembro la de $w = \frac{w_1}{w_2}$; y puesto que para valores finitos de z y w los puntos notables se deducen de $\frac{dw}{dz} = 0$, resulta la

siguiente proposición, en cuya demostración no entramos: *Todo punto cero de orden μ del determinante funcional es un punto notable de multiplicidad μ , es decir, a cada uno de estos puntos corresponde un punto de ramificación de orden μ de la superficie de Riemann sobre la esfera w . La principal ventaja que se encuentra en la aplicación de este teorema estriba en que no exige distinción entre los valores finitos e infinitos de z y w .*

También puede determinarse con toda precisión el *número de puntos notables*: En efecto, si las cuatro derivadas de las formas φ y ψ son de dimensión $n-1$, y, por lo tanto, el determinante funcional una forma de dimensión $2n-2$, ésta tendrá siempre $2n-2$ puntos ceros, teniendo en cuenta su multiplicidad. *Luego, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$ son los puntos notables de la esfera z (es decir, si es $\varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2 = 0$ para $\frac{z_1}{z_2} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$) y $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_v$, sus órdenes respectivos de multiplicidad, su suma es:*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_v = 2n - 2.$$

La representación conforme hace corresponder a estos puntos los v *puntos de ramificación*

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_v$$

de la superficie de Riemann sobre la esfera w , los cuales necesariamente están separados y alrededor de ellos se unen constituyendo un ciclo $\mu_{1+1}, \mu_{2+1}, \dots, \mu_{v+1}$ hojas, respectivamente:

Es de observar, sin embargo, que puede ocurrir que *distintos puntos de ramificación* ocupen el mismo punto en la esfera w , puesto que la función $w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ puede tomar un mismo valor para

varios de los $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$. Cuando eso ocurre, sobre este punto vienen a pasar diferentes series de hojas separadas unas de otras y que se unen en él. A cada uno de estos puntos de la esfera w lo llamaremos de *ramificación* y lo designaremos por A, B, C, \dots ; su número puede ser menor que v , según lo dicho.

Vamos ahora a precisar mejor el concepto de *superficie de Riemann*, a fin de que la idea algo vaga que con lo expuesto haya podido adquirir el lector, llegue a tomar una forma clara e intuitiva. Para ello *hacemos pasar por los puntos de ramificación* A, B, C, \dots de la esfera w , una *curva cerrada, L , que no se corte a sí misma y de forma lo más sencilla posible, distinguiendo una de otra las dos porciones en que la esfera queda dividida por la línea, rayando una cualquiera de ellas* (fig. 34). En todos

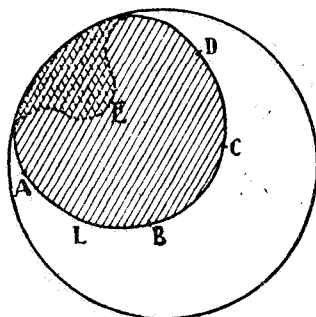


Figura 34

los ejemplos de que tratemos los puntos A, B, C, \dots serán reales; en cuyo caso tomaremos, naturalmente, como *curva L el círculo meridiano de los números reales*, con la cual cada una de aquellas porciones de la esfera será un hemisferio.

Una vez trazada la línea L , para continuar hablando en general, damos un corte a cada dos hojas conexas de la superficie de Riemann a lo largo del arco de unión de dos puntos de ramificación; como es sabido, ninguna variación esencial se produce en la superficie de Riemann, de cualquier manera que se haga

este corte con tal que sus extremos se mantengan fijos, es decir, que se pueden unir las mismas hojas a lo largo de otras curvas que unan los mismos puntos de ramificación. En esta variabilidad estriba la gran generalidad de esta superficie, pero la misma variabilidad es origen, al mismo tiempo, de la mayor dificultad de la idea de la superficie de Riemann. Para dar a esta superficie una forma concreta que la haga más asequible, supondremos que *todos los cortes que unen puntos de ramificación están dados a lo largo de la curva L que pasa por todos ellos*; de este modo, pueden darse varios de estos cortes a lo largo del mismo arco de la curva L , y en cambio haber otros arcos que no se utilicen como cortes.

*Cortemos, ahora, el conjunto de todas las hojas, es decir, cada hoja separadamente a lo largo de esta curva L ; como antes hemos trasladado a esta curva todos los cortes de ramificación, en ella se cortan todas las hojas y, por consiguiente, nuestra superficie de Riemann queda descompuesta en n **semihojas**, completamente libres de puntos de ramificación, extendidas sobre cada uno de los casquetes esféricos separados por la curva L . Correspondiendo a la distinción antes hecha de los dos casquetes, distinguiremos también n semihojas rayadas y n sin rayar. Ahora podemos ya ver bien cómo estaba formada la primitiva superficie de Riemann: *Toda semihoja rayada está rodeada de semihojas sin rayar a las cuales se une a lo largo de los arcos AB, AC, \dots de la curva L ; y del mismo modo, cada semihoja no rayada está rodeada de otras rayadas a lo largo de tales arcos de L . Únicamente en un punto de ramificación pueden unirse más de dos semihojas; si el orden de multiplicidad de la ramificación es μ , se unen alternándose $\mu + 1$ semihojas rayadas e igual número de las sin rayar.**

Puesto que la esfera z se representa unívocamente sobre la superficie de Riemann de la esfera w por medio de la función $w(z)$, podemos referir a aquélla cuanto acabamos de decir, y tendremos: Por razón de la continuidad, a las $2n$ semihojas de la superficie, corresponden $2n$ recintos conexos en la esfera z —que distinguiremos rayándolos o no, según que lo estén o no las semihojas—separados unos de otros por las n líneas imágenes de cada uno de los trozos AB, BC, \dots de la curva L , determinados por la función n -forme $z(w)$. *Cada uno de los semirrecintos ra-*

yadós se unen a lo largo de tales líneas con los no rayados; y cosa análoga sucede a cada recinto sin rayar respecto de los rayados; únicamente por un punto singular de orden μ pasan más de dos semirrecintos, a saber, $\mu+1$ de los primeros e igual número de los segundos.

Esta división en regiones de la esfera z permite seguir el curso de la función $z(w)$ con todas sus particularidades, como veremos en algunos ejemplos sencillos y característicos. Empezaremos por el más simple.

1. La ecuación «pura»

Con este nombre designamos la conocida ecuación

$$z^n = w \quad [1]$$

cuya solución formal se obtiene introduciendo el signo de la radicación:

$$z = \sqrt[n]{w},$$

pero con lo cual, naturalmente, nada se ha adelantado en el conocimiento de la dependencia funcional entre z y w . Para estudiar esta dependencia seguiremos el procedimiento general. Haciendo uso de variables homogéneas, será:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^n}{z_2^n};$$

y el determinante funcional de los dos términos de la última fracción

$$\begin{vmatrix} nz_1^{n-1} & 0 \\ 0 & nz_2^{n-1} \end{vmatrix} = n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1}$$

se anula, evidentemente, para $z_1=0$ y $z_2=0$, de modo que, volviendo a las variables no homogéneas, $z_1=0$ y $z_2=\infty$ son ceros de multiplicidad de orden $n-1$, con lo cual se conocen ya todos los puntos singulares, de multiplicidad total $2n-2$.

Según nuestro teorema general, para $w=z^n$, los puntos correspondientes a los valores $w=0$ y $w=\infty$ son los únicos pun-

tos de ramificación de la superficie de Riemann sobre la esfera w ; y todos ellos tienen la multiplicidad $n-1$; de modo que en cada uno se unen todas las n hojas. Como curva L marcamos ahora sobre la esfera w el meridiano de los números reales y después de trasladar convenientemente las líneas de unión de los puntos de ramificación, cortamos todas las hojas de la superficie de Riemann a lo largo de este meridiano; de esta manera queda dividida la esfera en $2n$ semiesferas, y rayamos cada vez la situada en el hemisferio posterior de la esfera, la que, por consiguiente, corresponde a valores de w con parte imaginaria positiva, y sobre el meridiano distinguiremos siempre el semimeridiano del de números reales positivos de los negativos, marcando el primero con línea llena y el segundo con línea de trazos (fig. 35).

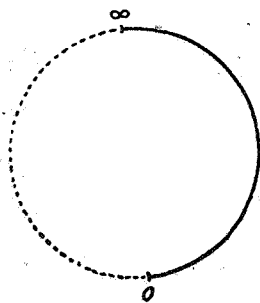


Figura 35

Ahora nos toca investigar las imágenes de esta curva meridiana L sobre la esfera z , que originan la división característica de la esfera en semirrecintos. Sobre el semimeridiano positivo es $w=r$, donde r pasa por todos los valores reales y positivos, desde 0 hasta ∞ ; por consiguiente, según una conocida fórmula, será

$$z = \sqrt[n]{r} = \left| \sqrt[n]{r} \right| \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

que, para los diferentes valores de k , recorre los semimeridianos que forman con el de los números reales positivos los ángulos,

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Estas curvas corresponden, pues, al semimeridiano L marcado de línea llena. Análogamente, para el semimeridiano negativo de la esfera w hay que escribir $w = -r = re^{i\pi}$ siendo como antes $0 < r < \infty$ y resulta:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left| \sqrt[n]{r} \right| \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{n} \right), (k=0, 1, \dots, n-1);$$

a este semimeridiano corresponden los n semimeridianos de la esfera z de «longitudes geográficas»

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{(n-1)\pi}{n},$$

los cuales bisecan los ángulos de los anteriores. Según esto, aparece descompuesta la esfera z en $2n$ husos que tienen por vértices los polos norte y sur. Esta división satisface plenamente a la teoría general; en particular, vemos que solamente en los puntos notables (los dos polos) se juntan más de dos recintos, en realidad $2n$, como corresponde a la multiplicidad $n-1$.

En lo que concierne al rayado de los recintos, basta fijarse en uno, puesto que los demás deben aparecer alternativamente rayados y sin rayar. Observemos ahora, al considerar el hemisferio rayado de la esfera n (por consiguiente, el situado detrás), que la línea llena del contorno está a la izquierda y la de trazos a la derecha, y puesto que se trata de una representación conforme, sin cambio de sentido en los ángulos, toda la región rayada de la esfera w debe tener esta misma relación de posición: estar limitada por una línea llena a la izquierda y una de trazos a la derecha. Con esto queda ya bien clara la división en regiones de la esfera z ; es de observar, además, una diferencia característica en la distribución de las regiones sobre ambas semiesferas z , según que n sea par o impar, como se ve en las figuras 36 y 37, para los primeros casos $n=3, 4$.

Se deja advertir claramente en lo dicho, cuán necesario es el paso a la esfera compleja para la completa comprensión del problema; en el plano complejo z hubiese aparecido descompuesto éste en sectores por rayos que parten del punto cero y forman ángulos iguales entre sí, y no habría modo de ver intuitivamente que $z=\infty$ como punto singular y $w=\infty$ como punto de ramifi-

cación tienen la misma significación que los puntos $z=0$ y $w=0$, respectivamente.

Con esto tenemos ya base para llegar al conocimiento exacto de la dependencia funcional entre z y w ; sólo falta por estudiar todavía la *representación conforme de cada uno de los $2n$ husos esféricos sobre una u otra de las semiesferas w* , cuestión sobre la que no es preciso entrar en pormenores, ya que para todo el que se ha ocupado con la representación conforme, este caso es uno

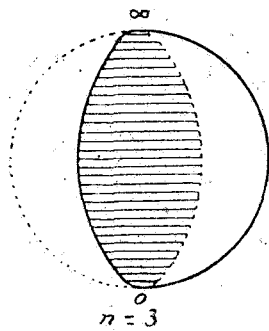


Figura 36

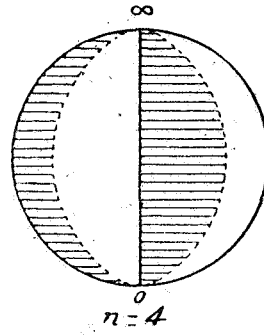


Figura 37

de los más sencillos e intuitivos. En cuanto a los métodos para el cálculo numérico de z trataremos más adelante (véase § 5).

Vamos a examinar ahora una cuestión de gran interés, a saber: *la dependencia mutua entre las regiones de la misma naturaleza en que ha quedado descompuesta la esfera z* ; dicho con más precisión: $w=z^n$ toma valores iguales en un punto de cada una de las n regionales rayadas. ¿Existirá alguna relación sencilla entre los valores correspondientes de z que permita expresar uno de ellos en función del otro?

Para verlo, observamos que poniendo $z'=z \cdot \varepsilon$, designando por ε una raíz enésima cualquiera de la unidad, es $z'^n=z^n$, es decir, $w=z^n$ toma en todos los puntos

$$z' = \varepsilon^\nu z = e^{\frac{2\nu\pi}{n}i} z \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

el mismo valor. Estos n puntos z' se distribuyen, pues, en todos los n recintos rayados, cuando se toma z en un recinto rayado,

y al describir z este recinto, los z' describen simultáneamente cada uno de aquéllos; y lo mismo se dice de los recintos no rayados.

Ahora bien, cada una de las sustituciones [2] está representada geoméricamente por un giro de la esfera z de un ángulo $\nu \frac{2\pi}{n}$ alrededor del eje vertical $(0, \infty)$; puesto que, como es sabido, en

el plano complejo, la multiplicación de $e^{\frac{2\nu i\pi}{n}}$ representa un giro de aquel ángulo alrededor del origen. Por consiguiente, se pasa de unos a otros de los puntos correspondientes de estas regiones, lo mismo que de una a otra de ellas, por aquellos n giros alrededor del eje vertical.

Así, pues, si previamente se hubiese determinado uno solo de los recintos rayados, esta observación permitiría determinar todos los recintos de la misma especie, utilizando la propiedad de las sustituciones [2] de transformar la ecuación [1] en sí misma (es decir, $z^n = w$ en $z'^n = w$) y de que su número es el grado de la ecuación. En los ejemplos que siguen podremos indicar siempre de antemano tales sustituciones lineales y con ello utilizar la gran simplificación que se logra en la determinación de la distribución de los recintos.

Partiendo, ahora, de este ejemplo, vamos a introducir un concepto general muy importante, el de la irreducibilidad para las ecuaciones que contienen un parámetro racional w , caso más general que el de las ecuaciones de coeficientes numéricos racionales, que, ocasionalmente, hemos considerado al tratar de la construcción del eptágono regular. Una ecuación $f(z, w) = 0$ (en nuestro ejemplo, $z^n - w = 0$) donde $f(z, w)$ es un polinomio en z cuyos coeficientes son funciones racionales de w , se llama reducible respecto al parámetro w cuando $f(z, w)$ se puede descomponer en un producto de dos polinomios de la misma naturaleza:

$$f(z, w) = f_1(z, w) \cdot f_2(z, w);$$

en caso contrario se llama irreducible en w . La mayor generalidad de este concepto respecto del anterior estriba en que aquí se toma como «campo de racionalidad» para operar y al cual pertenecen los coeficientes de los polinomios factores, en lugar del

conjunto de los números racionales, el de todas las funciones racionales del parámetro w ; es decir, que pasamos de una concepción puramente aritmética a una teórico-funcional pura.

Si representamos intuitivamente cada ecuación $f(z, w) = 0$ por su superficie de Riemann, podremos establecer un criterio sencillo para la reductibilidad en el sentido que acabamos de definir. Si la ecuación es reducible, cada par de valores (z, w) que la satisfaga debe hacer que sea $f_1(z, w) = 0$, ó $f_2(z, w) = 0$; y representadas ambas soluciones por sus respectivas superficies de Riemann, éstas son completamente independientes entre sí, y en particular, no tienen conexión ninguna. Por lo tanto, la superficie de Riemann correspondiente a una ecuación reducible $f(z, w) = 0$ debe descomponerse, a lo menos, en dos porciones separadas.

Según esto, se podrá reconocer inmediatamente que la ecuación $x^n - w = 0$ es seguramente irreducible en el sentido teórico-funcional; pues en su superficie de Riemann, que conocemos perfectamente, todas sus n hojas se unen en ciclo en cada punto de ramificación y, según lo dicho, toda la superficie está representada en la esfera z conexa y sin cortés, de modo que no puede haber descomposición alguna.

Partiendo de estas ideas, podemos abordar uno de los problemas más famosos y populares desde la antigüedad, a saber: el de la división de un ángulo cualquiera φ en n partes iguales; en particular, para $n = 3$, el de la trisección del ángulo. El problema es encontrar una construcción exacta, utilizando únicamente la regla y el compás, que aplicada a un ángulo cualquiera φ lo divida en tres partes iguales; para una serie de valores particulares de φ es fácil de resolver el problema.

Expondremos el proceso del razonamiento en la demostración de la imposibilidad de la trisección del ángulo, en el sentido arriba indicado, siguiendo marcha análoga a la de la demostración que dimos de la imposibilidad de la construcción del eptágono regular (página 73). Exactamente como allí, se reduce la cuestión a resolver una ecuación cúbica irreducible y ver que no es resoluble por una sucesión de radicales cuadráticos; sólo que ahora se trata de una ecuación en que interviene un parámetro, el ángulo φ , en vez de ser números enteros los coeficientes como en el otro caso; y por esto es preciso introducir aquí el concepto de la irreducibilidad funcional, en lugar de la aritmética.

Para encontrar la ecuación del problema imaginemos en el plano de las w , el ángulo φ contado a partir del semieje real positivo (fig. 38); su lado extremo cortará al círculo unidad en el punto

$$w = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$$

Nuestro problema se reduce a encontrar una construcción independiente del valor especial que pueda tomar φ , en la cual sólo

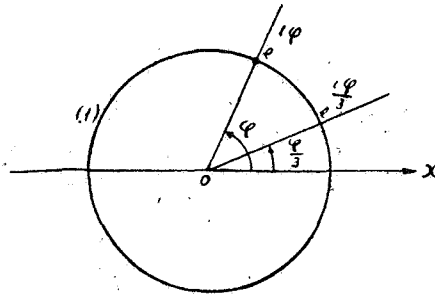


Figura 38

se emplee un número finito de veces la regla y el compás y que siempre nos dé el punto de intersección del círculo unidad con el lado extremo del ángulo $\frac{\varphi}{3}$, es decir, el punto:

$$z = e^{i\frac{\varphi}{3}} = \cos \frac{\varphi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{3}.$$

Este valor de z satisface a la ecuación

$$z^3 = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi. \quad [3]$$

y el equivalente analítico de nuestro problema geométrico consiste, por tanto (pág. 73), en ver si esta ecuación puede resolverse por medio de una expresión compuesta de radicales cuadráticos superpuestos que operen sobre funciones racionales de $\cos \varphi$ y $\operatorname{sen} \varphi$; pues estas magnitudes son las coordenadas del punto w del cual se parte en nuestra construcción.

Tenemos que probar primero que la ecuación [3] es irreduci-

ble en el sentido teórico funcional. Esta ecuación no tiene exactamente la forma indicada en la definición del concepto de irreducibilidad; pues en lugar de entrar en sus coeficientes racionalmente el parámetro complejo w , aparecen racionalmente las dos funciones \cos y \sin del parámetro real φ ; pero en una generalización natural de nuestro concepto, diremos que el polinomio $z - (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ es reducible cuando se puede descomponer en polinomios en z cuyos coeficientes sean funciones racionales de $\cos \varphi$ y $\sin \varphi$, con lo cual podremos adoptar para este caso el mismo criterio que anteriormente. Hagamos en la ecuación [3] que φ tome todos los valores reales; entonces $w = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ recorre todo el círculo unidad del plano w , al cual corresponde en la proyección estereográfica sobre la esfera w , el círculo ecuador; la curva situada sobre este círculo en la superficie de Riemann de la ecuación $z^3 = w$ que recorre sin discontinuidad las tres hojas de esta superficie, está representada unívocamente sobre el círculo unidad por la ecuación [3], y puede, en cierto modo, designarse como su «figura de Riemann unidimensional». De la misma manera podemos asignar a toda ecuación de la forma $f(z, \cos \varphi, \sin \varphi) = 0$ la correspondiente figura de Riemann unidimensional, cuando tomamos tantos ejemplares del círculo unidad con el arco de longitud φ como raíces tiene la ecuación, y ligados entre sí en la forma correspondiente a la conexión entre las raíces. Entonces prosiguiendo exactamente como anteriormente, se ve que la ecuación [3] sólo puede ser reducible cuando su figura de Riemann unidimensional se descompone en partes completamente separadas, y como esto, evidentemente, no se verifica en este caso, queda así probada la irreducibilidad de nuestra ecuación [3].

Observemos, ahora, que la demostración expuesta en otro lugar (págs. 73 y sig.) de que una ecuación de coeficientes numéricos racionales es reducible cuando puede resolverse por una expresión compuesta de radicales cuadráticos es aplicable literalmente al presente caso de una ecuación irreducible funcional, sin más que sustituir los «números racionales» por «funciones racionales de $\cos \varphi$ y $\sin \varphi$ »; por consiguiente, queda completamente demostrada nuestra afirmación de que la trisección del ángulo para cualquier valor de φ no puede ejecutarse empleando exclusivamente la regla y el compás un número finito de veces; los es-

fuerzos de los trisectores resultarán, por lo tanto, siempre baldíos.

Pasemos, ahora, a la consideración de un ejemplo un poco más complicado que el anterior.

2. La ecuación diédrica

Se denomina así, por razones que veremos más adelante, la ecuación

$$w = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right). \quad [1]$$

Su grado es $2n$, como se deduce multiplicándola por z^n .

Introduciendo las coordenadas homogéneas, se convierte en:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2 z_1^n \cdot z_2^n},$$

en cuya expresión aparecen, en efecto, formas de $2n$ dimensiones en numerador y denominador. El determinante funcional de estas formas es:

$$\begin{vmatrix} 2nz_1^{2n-1} & 2nz_2^{2n-1} \\ 2nz_1^{n-1}z_2^n & 2nz_1^n z_2^{n-1} \end{vmatrix} = 4n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1} (z_1^{2n} - z_2^{2n}),$$

que, desde luego, tiene $z_1=0$ y $z_2=0$, como ceros de multiplicidad $n-1$; las $2n$ raíces restantes se deducen de la ecuación:

$$z_1^{2n} - z_2^{2n} = 0, \quad \text{o sea} \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \pm 1.$$

Utilizando además de la raíz enésima de la unidad antes considerada $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ la siguiente raíz enésima de -1 :

$$\varepsilon' = e^{\frac{i\pi}{n}},$$

las $2n$ últimas raíces serán:

$$\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon^v, \quad \frac{z_1}{z_2} = \varepsilon' \cdot \varepsilon^v \quad (v = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Los valores respectivos de $z = \frac{z_1}{z_2}$ tienen todos el módulo 1 y, por consiguiente, están en el *ecuador* de la esfera z (que corresponde al círculo unidad del plano z), y separados cada dos consecutivos por ángulos iguales a $\frac{\pi}{n}$.

Tenemos, por lo tanto, como puntos singulares sobre la esfera z :

El polo sur $z=0$ y el polo norte $z=\infty$, con la multiplicidad común $n-1$;

Los $2n$ puntos ecuatoriales $z=e^{\nu}$, ε^{ν} , todos ellos simples.

La suma de todos los órdenes de multiplicidad es

$$2(n-1) + 2n = 4n - 2,$$

conforme a lo dicho en el teorema general de la página 158. En virtud de la ecuación [1] a los puntos singulares $z=0, \infty$, de la esfera z corresponde en la esfera w el $w=\infty$; a todos los puntos $z=\varepsilon$ el punto $w=+1$; y por último, a todos los $z=\varepsilon^{\nu}$ el $w=-1$.

Existen, según esto, *solamente tres puntos de ramificación* $\infty, +1, -1$, sobre la esfera w ; pero además hay sobre

$w=\infty$ *dos puntos de ramificación de multiplicidad $n-1$;*

$w=+1$ *n puntos de ramificación de multiplicidad 1;*

$w=-1$ *n puntos de ramificación de multiplicidad 1.*

Las $2n$ hojas de la superficie de Riemann se agrupan, por consiguiente, sobre el punto $w=\infty$ en dos series formadas cada una por n hojas unidas en ciclo; en $w=+1$ y en $w=-1$, en n series separadas, formada cada una por 2 hojas. Se aclarará intuitivamente el curso de estas hojas, cuando consideremos la correspondiente división de la esfera z en semirrecintos.

Para ello conviene, como ya se ha hecho observar, que estudiemos las sustituciones lineales que dejan invariable la ecuación [1].

Desde luego no varía, lo mismo que en el caso de la ecuación pura, con las n sustituciones

$$z' = \varepsilon^{\nu} z \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{de donde} \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad [2a]$$

puesto que para éstas es siempre $z'^n = z^n$. Tampoco cambia por las n sustituciones

$$z' = \frac{\varepsilon^v}{z} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad [2b]$$

puesto que con ella se permutan entre sí z^n y $\frac{1}{z^n}$. Tenemos, pues, $2n$ sustituciones lineales que transforman en sí misma la ecuación [1]; su número es, como se ve, el grado de la ecuación.

Si para cualquier valor de w se conoce una raíz, z_0 , de la ecuación [1], inmediatamente se conocen $2n$ valores, en general distintos

$$\varepsilon^v z_0 \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon^v}{z_0} \quad (v = 0, 1, \dots, n-1)$$

es decir, se conocen todas las raíces de la ecuación, una vez hallada la raíz enésima de la unidad ε .

Pasemos, ahora, a la investigación de la división de la esfera z que corresponde a un corte de la superficie de Riemann sobre la esfera w a lo largo del meridiano real; para ello, análogamente a lo hecho en el ejemplo, distinguiremos sobre el meridiano real de la esfera w (fig. 39) los arcos determinados por los tres puntos de ramificación desde $+1$ hasta ∞ (línea llena); desde ∞ hasta -1 (de puntos), y desde -1 hasta $+1$ (de trazos). A cada uno de estos tres arcos corresponden en la esfera z , $2n$ diferentes porciones de curva, que se deducen de una cualquiera de ellos por medio de las $2n$ sustituciones lineales [2]; basta, por consiguiente, en todos los casos determinar uno de ellos. Además, estas líneas deben unir los puntos singulares $z=0, \infty, \varepsilon^v, \varepsilon^v \cdot \varepsilon^v$, que marcamos previamente sobre la esfera z ; su imagen, exactamente como en el caso anterior, es muy diferente, según que n sea par o impar. Bastará aquí que nos fijemos en un caso particular, por ejemplo, en el de ser $n=6$. La figura 39 representa en proyección ortogonal el hemisferio anterior de la esfera z y en ella se ven: de los puntos ε^v , distribuidos de izquierda a derecha sobre el ecuador, a distancias angulares de 60° entre sí, los $\varepsilon^3 = -1, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6 = 1$; y de los $\varepsilon^v \cdot \varepsilon^v$, equidistantes de ellos sobre este mismo círculo, los $\varepsilon^v \varepsilon^3, \varepsilon^v \varepsilon^4 = -i$ y $\varepsilon^v \varepsilon^5$.

Decimos ahora que el cuadrante $+1 < z < \infty$ del meridiano real de la esfera z corresponde al arco lleno $+1 < w < +\infty$ del meridiano real w . En efecto, pongamos $z=r$ y supongamos que r pasa por todos los valores reales desde 1 hasta ∞ ; entonces

$$w = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = \frac{1}{2} \left(r^n + \frac{1}{r^n} \right)$$

toma valores también reales y crece constantemente desde 1 hasta ∞ . De este cuadrante se deducen las n líneas llenas de la esfera z , aplicándole las n sustituciones lineales [2a], las cuales,

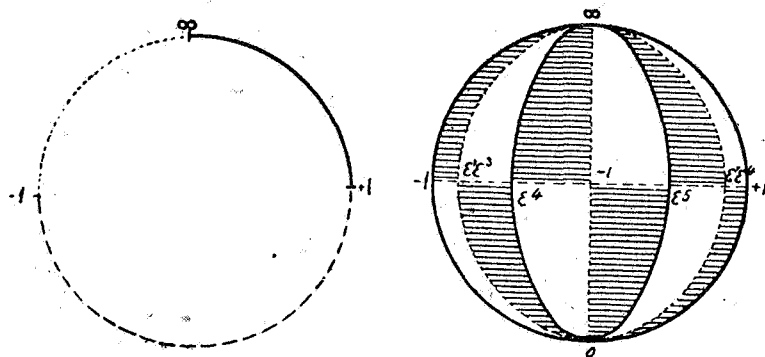


Figura 39

según dijimos en el ejemplo anterior, representan rotaciones de la esfera alrededor del eje vertical $(0, \infty)$ de ángulos

$$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n};$$

así se obtienen los n cuadrantes de meridiano que van del polo norte ∞ a los puntos ξ^j del ecuador.

Otra curva llena se obtiene cuando se aplica la sustitución $z' = \frac{1}{z}$; se pasa así del cuadrante del meridiano que va desde $+1$ hasta $+\infty$, al cuadrante real inferior desde $+1$ hasta 0 . Si efectuamos también todas estas n rotaciones [2a]—su composición con la transformación $z' = \frac{1}{z}$ da todas las n sustituciones [2b]—, aparecen los n cuadrantes de meridiano que unen el polo

sur con los puntos ε^{ν} del ecuador, con lo cual tenemos ya las $2n$ líneas llenas pedidas, correspondientes al cuadrante del meridiano lleno w . Para $n=6$ estas líneas forman los tres meridianos completos que se obtienen haciendo girar el meridiano real de ángulos 0° , 60° y 120° .

Observemos, además, que el conjunto de los valores $z=\varepsilon^{\nu}r$, en que r toma todos los valores reales desde $+1$ hasta ∞ , corresponde al cuadrante punteado del meridiano real w ; pues la ecuación [1] da para esta línea:

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{2n} r^{2n} + \frac{1}{\varepsilon^{2n} r^{2n}} \right) = -\frac{1}{2} \left(r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} \right)$$

y esta expresión demuestra que, en efecto, w decrece constantemente y pasa por todos los valores desde -1 hasta $-\infty$. Ahora bien, $z=\varepsilon^{\nu}r$ representa el cuadrante del meridiano desde ∞ hasta el punto ecuatorial ε^{ν} ; y aplicándole las sustituciones [2a] y [2b], resulta, exactamente como antes, que al cuadrante punteado del meridiano real w corresponden todos los cuadrantes que unen los polos con los puntos ecuatoriales ε^{ν} , ε^{ν} , los cuales bisecan los ángulos formados por los meridianos antes obtenidos.

Falta hallar todavía los $2n$ arcos que corresponden al semi-meridiano de trazos $-1 < w < +1$; y vamos a probar que son precisamente los arcos del ecuador de la esfera z determinados por los puntos ε^{ν} y $\varepsilon^{\nu} \cdot \varepsilon^{\nu}$. En efecto, el ecuador representa los puntos de módulo igual a 1 y viene, por lo tanto, determinado por $z=e^{i\varphi}$, donde φ es real y toma todos los valores de 0 a $2n$. Por consiguiente, el valor correspondiente es:

$$w = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = \frac{1}{2} (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) = \cos(n\varphi),$$

que permanece siempre real y de valor absoluto ≤ 1 , y toma precisamente una vez todo valor comprendido entre $+1$ y -1 , cuando φ recorre un arco de longitud $\frac{\pi}{n}$, pasando de uno cualquiera de los múltiplos de $\frac{\pi}{n}$ al inmediato, es decir, cuando z describe uno de los arcos antedichos.

Las curvas así determinadas dividen a la esfera z en $2 \cdot 2n$ semirrecintos de forma triangular, limitados por tres curvas, una de cada clase, y cada semirrecinto corresponde a una semihoja de la superficie de Riemann; sólo en un punto singular se juntan varios recintos y, según lo indicado por la tabla de multiplicidades de la página 171, se unen en el polo norte y en el sur, $2n$; y en cada punto ϵ^v y $\epsilon^v \epsilon^w$, $2 \cdot 2$.

Para fijar cuáles de estos recintos deben rayarse, observemos que el hemisferio posterior de la esfera w queda siempre a la izquierda cuando se recorre su contorno siguiendo sucesivamente un arco lleno, uno de trazos y uno de puntos; luego, por ser conforme la representación y no cambiar el sentido de los ángulos, habrá que rayar todos los semirrecintos en los cuales se suceden las tres partes del contorno en el mismo sentido, y dejar sin rayar todos los demás.

De este modo obtenemos la imagen geométrica completa de la dependencia establecida por nuestra ecuación entre las varia-

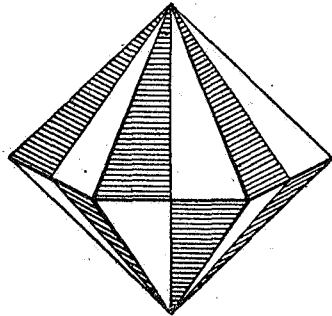


Figura 40

bles z y w . Se podría aún seguir su estudio, analizando más circunstanciadamente la representación conforme de cada uno de los recintos triangulares de la esfera w , cosa de que, como antes, prescindiremos por razón de brevedad, limitándonos solamente a exponer sumariamente el interesante caso particular de $n=6$. La esfera queda entonces dividida en doce triángulos rayados y otros doce sin rayar; en la figura 40 se ven seis de cada clase. En cada polo se reúnen seis de cada clase y en doce puntos equidistantes del ecuador dos de cada clase; cada recinto

queda representado conforme en una semihoja de igual clase de la superficie de Riemann, y estas hojas se unen correspondiendo a la agrupación de los semirrecintos cada seis de una misma clase en el punto de ramificación ∞ , y cada dos de la misma clase en los puntos de ramificación ± 1 .

Se obtiene una *imagen* de la división de la esfera cómoda para su realización práctica y digna de mención por su analogía con lo que sigue, procediendo de este modo: Se unen por medio de segmentos rectilíneos cada dos puntos consecutivos del ecuador distantes entre sí $\frac{2\pi}{n}$ (por ejemplo, todos los ε^{ν}) y además cada uno de ellos con los polos. Se forma así una *doble pirámide inscrita en la esfera, con n caras laterales* (en la fig. 40, seis) *sobre cada hoja*. Proyectando la división de la esfera, desde el centro, sobre esta doble pirámide, aparece cada cara lateral dividida por su altura en dos partes, una rayada y otra sin rayar. Representando por esta doble pirámide la división de la esfera y, por consiguiente, nuestra función, nos reporta un servicio semejante al de los *poliedros regulares* en los ejemplos que siguen. Lograremos una *analogía completa con éstos suponiendo la doble pirámide «aplastada» sobre su base*; resulta, entonces, un *polígono regular de n lados, de dos caras*, cada una de las cuales aparece descompuesta por las rectas que unen su centro con los vértices y puntos medios de sus lados en $2n$ triángulos (fig. 41)

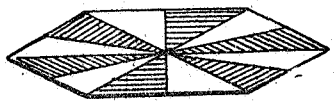


Figura 41

Siempre he asociado esta figura como diedro a los cinco poliedros regulares conocidos desde Platón. Cumple, en efecto, todas las condiciones que ordinariamente definen un poliedro regular, puesto que se compone de polígonos regulares congruentes (las dos caras del polígono regular de n lados) y tiene aristas congruentes (los lados del polígono) y anguloides iguales (los ángulos de dicho polígono); la única diferencia es que no limita ningún cuerpo propiamente tal, sino que encierra un espacio nulo.

En este sentido, el teorema de Platón de que sólo existen cinco poliedros regulares, únicamente es cierto cuando se incluye en la definición la condición implícitamente utilizada en la demostración de que encierre un cuerpo *propriamente dicho*.

Partiendo del «diedro» se obtiene evidentemente nuestra división de la esfera, cuando, además de sus vértices, se proyectan sobre la esfera los puntos medios de sus aristas y los centros de sus caras laterales, siendo los rayos proyectantes perpendiculares al plano del diedro; por lo tanto, el diedro puede considerarse también como representación de la relación funcional establecida por nuestra ecuación entre w y z ; de aquí que esta ecuación puede ser llamada con propiedad «ecuación diédrica».

Pasemos, ahora, a las ecuaciones que—como hemos dicho—están íntimamente ligadas con los poliedros regulares de Platón.

3. Ecuaciones tetraédrica, octaédrica e icosaédrica

Las ecuaciones octaédrica e icosaédrica pudieran con igual razón llamarse *cúbica* y *dodecaédrica*, respectivamente, como luego veremos; de suerte que en los tres ejemplos que examinaremos en este artículo, están comprendidos los cinco cuerpos regulares. Seguiremos aquí el mismo camino que en los casos anteriores, pero recorrido en sentido contrario: *deduciremos, primero, partiendo de los poliedros regulares, la división de la esfera, y estableceremos después la ecuación algebraica correspondiente, que encuentra su representación geométrica e intuitiva en aquella figura*. Habré, sin embargo, de limitarme con frecuencia a simples indicaciones, por lo cual, ya desde ahora, remitimos al que desee más amplias explicaciones a mi obra «*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade*» (*); en la cual se hace una exposición completa y sistemática de esta teoría, así como de sus numerosas relaciones con las afines.

Vamos a tratar los tres casos paralelamente, comenzando con la *manera de efectuar la división de la esfera en regiones, en el caso del tetraedro*.

(*) Leipzig, 1884. En adelante, será citada, abreviadamente, «Ikosaedro».

1. *El tetraedro.* (Fig. 42). Dividiremos cada una de las cuatro caras triangulares equiláteras del tetraedro por sus alturas en seis *triángulos parciales*, de los cuales cada tres que se suceden alternativamente son congruentes, en tanto que cada dos consecutivos son simétricos respecto del lado común. Obtenemos así una *división de toda la superficie del tetraedro en veinticuatro triángulos*, que forman dos grupos, cada uno de doce triángulos congruentes entre sí, tales que dos triángulos de diferentes grupos son *inversamente iguales*; distinguiremos los triángulos de uno de los grupos de los del otro rayándolos.

En cuanto a los vértices de estos veinticuatro triángulos podemos distinguir *tres especies*, de tal modo que cada uno de estos triángulos tiene un vértice de cada especie:

- a) *Los cuatro vértices del tetraedro, en los cuales concurren cada tres triángulos rayados y cada tres sin rayar;*
- b) *Los cuatro centros de las caras del tetraedro, los cuales*

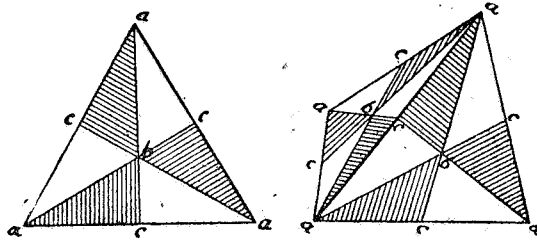


Figura 42

son, a su vez, vértices de otro tetraedro regular (*el tetraedro conjugado*); en cada uno de ellos concurren también tres triángulos de cada especie;

- c) *Los seis puntos medios de las aristas, los cuales son vértices de un tetraedro regular, y en cada uno de los cuales concurren dos triángulos de cada una de ambas especies.*

Proyectando esta descomposición de triángulos desde el centro del tetraedro sobre la esfera circunscrita, aparece ésta descompuesta en 2.12 triángulos, limitados por arcos de círculo máximo, los cuales son alternativamente congruentes y simétricos. Alrededor de cada vértice las clases *a*, *b* y *c*, hay 6, 6 y 4 ángulos iguales, respectivamente, y puesto que la suma de los

ángulos consecutivos formados sobre la esfera alrededor de cualquiera de sus puntos vale siempre 2π , los triángulos esféricos así formados tienen el ángulo $\frac{\pi}{3}$ en un vértice a o b, y $\frac{\pi}{2}$ en un vértice c.

Una propiedad característica de esta descomposición de la esfera es que, como ocurre en el mismo tetraedro, puede llevarse a coincidir consigo misma por un cierto número de rotaciones alrededor de su centro, cosa que puede verse fácilmente construyendo un modelo de tetraedro con su división, como existe en algunas colecciones de modelos de figuras geométricas; aquí bastará enumerar las rotaciones posibles (contando entre ellas el reposo como «rotación idéntica»). Fijémonos en uno cualquiera determinado de los vértices del tetraedro de partida; por medio de un giro podemos llevarlo a coincidir con otro cualquiera de los tres vértices restantes (también consigo mismo), lo que da cuatro posibilidades; manteniéndolo fijo en una de estas posiciones, podemos llevar el tetraedro a coincidir consigo mismo de tres modos diferentes, a saber: haciéndole girar alrededor de la recta que une el centro con dicho vértice de ángulos iguales a 0° , 120° ó 240° . Esto da, en total, $4 \cdot 3 = 12$ rotaciones, por cuyo medio puede llevarse a coincidir consigo mismo el tetraedro, o la descomposición en triángulos esféricos correspondiente de la esfera circunscrita. Con estos giros se puede llevar un triángulo dado rayado (o no rayado) a coincidir con otro triángulo también rayado (o no rayado); y cada giro particular queda determinado cuando se fija este segundo triángulo.

Estas doce rotaciones forman, evidentemente, lo que se llama un Grupo G_{12} de operaciones; es decir, que cuando se ejecutan sucesivamente dos cualesquiera de estas rotaciones, resulta otra vez una de las doce.

Cada una de estas doce rotaciones está representada, cuando se considera la esfera como esfera de las z , por una transformación lineal de las z , y las doce transformaciones lineales así resultantes dejan invariable la ecuación correspondiente al tetraedro. Se reconoce fácilmente que las $2n$ sustituciones lineales de la ecuación del diedro pueden considerarse como el conjunto de las $2n$ rotaciones que permiten llevar a coincidir el diedro consigo mismo.

2. De modo análogo se procede en el caso del octaedro (figura 43), por lo cual abreviaremos su exposición ; cada una de las ocho caras triangulares equiláteras queda dividida como antes en seis triángulos parciales, resultando así descompuesta toda la superficie del octaedro en 24 triángulos, congruentes entre sí, rayados, y otros 24 triángulos también congruentes entre sí, e

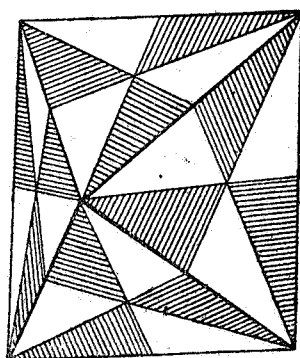


Figura 43

inversamente iguales a los primeros, y que no rayamos para diferenciar unos de otros. También aquí se pueden distinguir tres clases de vértices, a saber :

a) *Los seis vértices del octaedro, en los cuales concurren cuatro triángulos de cada clase.*

b) *Los ocho centros de las caras del octaedro, los cuales son vértices de un cubo ; en cada uno de ellos se juntan tres triángulos de cada clase.*

c) *Los doce puntos medios de las aristas, en cada uno de los cuales se reúnen dos triángulos de cada clase.*

Proyectando esta descomposición del octaedro desde su centro sobre la esfera circunscrita, se obtiene en ésta una descomposición en 2.24 triángulos esféricos, doce de ellos congruentes e inversamente iguales a los otros doce ; el ángulo en cada vértice a, vale $\frac{\pi}{4}$; en cada vértice b, $\frac{\pi}{3}$, y en cada vértice c, $\frac{\pi}{2}$.

Puesto que los vértices b forman un cubo, se ve fácilmente que exactamente la misma descomposición se obtendría partiendo de

un cubo y proyectando los vértices, los centros de sus caras y los puntos medios de las aristas sobre la esfera desde su centro. Por esta razón, no hace falta considerar especialmente el caso del cubo.

Exactamente como antes se ve que tanto el octaedro como esta descomposición de la esfera, pueden hacerse coincidir consigo mismos por medio de 24 rotaciones, las cuales forman un grupo G_{24} . Cada una de las rotaciones queda determinada como en el caso anterior cuando se da el triángulo rayado con el que ha de coincidir otro de la misma clase.

3) Pasemos, por último, al icosaedro (fig. 44). También aquí

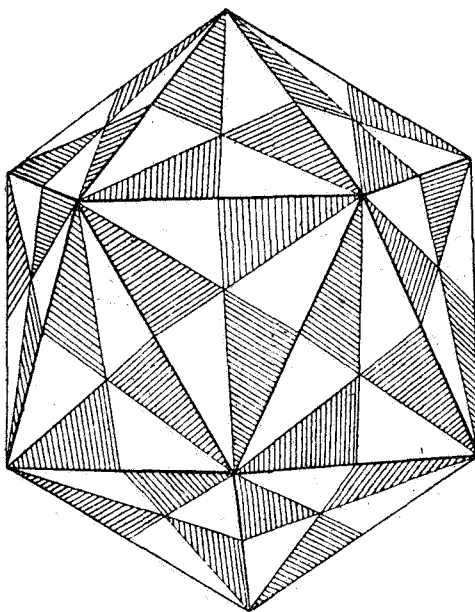


Figura 44

se descompone cada una de las veinte caras triangulares en triángulos parciales del mismo modo que en los casos anteriores, obteniéndose así 60 triángulos rayados y 60 no rayados. Las tres clases de vértices son:

a) Los doce vértices del icosaedro, en cada uno de los cuales concurren cinco triángulos de cada clase.

b) Los veinte centros de las caras del icosaedro, que son vértices de un dodecaedro regular; en cada uno de ellos se juntan tres triángulos de cada clase.

c) Los treinta puntos medios de las aristas, en cada uno de los cuales concurren dos triángulos de cada clase.

Proyectada esta descomposición de la superficie del icosaedro, desde su centro, sobre la esfera, se obtiene una descomposición análoga en triángulos esféricos, cuyos ángulos en los vértices a , b y c valen $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$ respectivamente. De la propiedad de los vértices b , se puede también deducir, como en el caso anterior, que la misma descomposición de la esfera se hubiera obtenido partiendo del dodecaedro regular.

Finalmente, pueden llevarse el icosaedro y la descomposición correspondiente de su esfera circunscrita a coincidir consigo mismo mediante rotaciones alrededor de su centro que forman un grupo G_{60} , y lo mismo estas rotaciones que las del octaedro pueden comprobarse fácilmente construyendo un modelo apropiado.

Resumiendo algunos de los resultados obtenidos, podemos formar la siguiente tabla de valores de los ángulos de los triángulos esféricos que resultan en los tres casos considerados, agregando los del diedro:

Diedro:	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{n}$
Tetraedro:	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{2}$
Octaedro:	$\frac{\pi}{4}$,	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{2}$
Icosaedro:	$\frac{\pi}{5}$,	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{2}$

Un naturalista (al decir esto, repito, variándolo ligeramente, un conocido chiste de Kummer), deduciría en seguida, que existen descomposiciones de la superficie esférica de propiedades análogas con ángulos, tales como

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}.$$

Un matemático no se atrevería, naturalmente, a aplicar tales analogías, y su prudencia aparece aquí completamente justificada; pues, en efecto, la *serie de las posibles descomposiciones de la superficie esférica de nuestra clase termina con las enunciadas*, cosa que simplemente depende de que *no hay más poliedros regulares que los que hemos considerado*, y cuya razón fundamental estriba en una *propiedad de los números enteros*, que no permite una reducción a otras más sencillas. Se ve, en efecto, que los ángulos de cada uno de nuestros triángulos tienen que ser divisores enteros de π como $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\pi}{r}$, con la condición de que los denominadores satisfagan a la desigualdad:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} > 1,$$

la cual tiene la propiedad de que sus únicas soluciones enteras son las contenidas en la tabla. La condición que implica esta desigualdad se comprende fácilmente: expresa simplemente que la suma de los ángulos esféricos es mayor que π .

Agreguemos que existe una *ingeniosa generalización* de esta teoría que rompe el marco aparentemente demasiado estrecho en que la hemos expuesto; nos referimos a la *teoría de las funciones automorfas*, que considera descomposiciones de la esfera en *un número infinito de triángulos*, cuya suma de ángulos es menor que π , o igual a π .

4. Continuación: Establecimiento de las ecuaciones normales

Pasemos, ahora, a la segunda parte de nuestro problema, o sea a establecer *ecuaciones de la forma*

$$\varphi(z) - w\psi(z) = 0, \quad \text{o} \quad w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \quad [1]$$

que correspondan a cada una de las tres descomposiciones de la superficie esférica indicadas, tales, por consiguiente, que representen las dos semiesferas de la esfera w sobre los 2.12, 2.24 y 2.60 triángulos esféricos de la esfera z , respectivamente. A cada valor de w deben corresponder, pues, en general, 12, 24 ó 60 va-

lores de z , uno en cada uno de los triángulos parciales de la especie correspondiente, y, por lo tanto, la ecuación buscada en los tres casos es de *grado* 12, 24 y 60, respectivamente, grado que designaremos de un modo general por N . Ahora bien, cada recinto parcial concurre con otros en tres puntos singulares, luego deben presentarse en cada caso *tres puntos de ramificación sobre la esfera w* , y éstos los tomamos, como es costumbre, como puntos $w=0, 1, \infty$; como *curva L de corte* que pasa por estos tres puntos y cuyos tres trozos deben corresponder a las líneas fronteras de los triángulos z tomamos nuevamente el *meridiano de los números reales*.

Haremos además (fig. 45) que, en cualquiera de los tres ca-

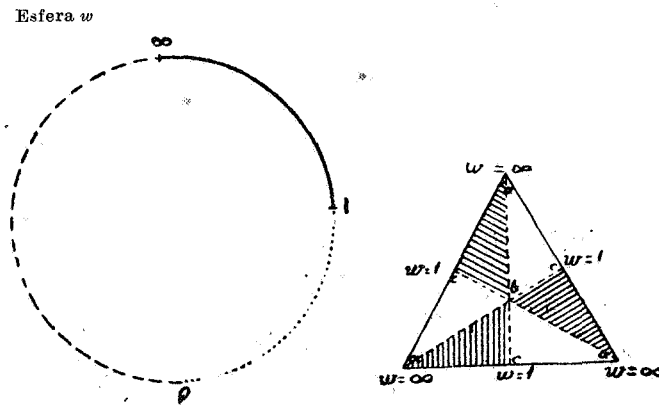


Figura 45

sos, al punto $w=0$ correspondan los centros de las caras del poliedro (vértices b en la notación del artículo anterior); al punto $w=1$ los puntos medios de las aristas (vértices c), y al punto $w=\infty$ los vértices del poliedro (vértices a). Entonces los lados del triángulo corresponden, en la forma que indica la naturaleza de las líneas de la figura, a los tres segmentos del meridiano w ; los triángulos rayados corresponden a la semiesfera posterior, y los no rayados a la anterior. Así establecida la correspondencia, la esfera z debe quedar representada unívocamente mediante la ecuación [1] sobre una superficie de Riemann de N hojas con los puntos de ramificación 0, 1 e ∞ , extendida sobre la esfera w .

La existencia de esta ecuación puede ser deducida fácilmente

te *a priori* de los teoremas generales de la teoría de funciones; sin embargo, mejor que suponer aquí los conocimientos que tal procedimiento entraña, preferimos una *construcción más empírica* de las ecuaciones en cuestión, la cual quizá nos proporcione una intuición más vivida del asunto.

Imaginemos escrita la ecuación [1] en coordenadas homogéneas:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\Phi_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

donde Φ_N y Ψ_N son polinomios homogéneos en z_1 y z_2 , de dimensiones N ($N=12, 24$ ó 60). En este modo de escribir la ecuación aparecen inmediatamente los puntos $w_1=0$ y $w_2=0$ (es decir, $w=0, \infty$) de la esfera w , pero no el tercer punto de ramificación $w=1$ (en homogéneas, $w_1-w_2=0$); y puesto que, para nuestras consideraciones, el mismo papel desempeñan los tres, conviene también escribir la ecuación bajo la siguiente forma:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_2} = \frac{X_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

donde $X_N = \Phi_N - \Psi_N$ es asimismo una forma de dimensión N . Ambos modos de escribir la ecuación pueden condensarse en la siguiente proporción continua:

$$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \Phi_N(z_1, z_2) : X_N(z_1, z_2) : \Psi_N(z_1, z_2); \quad [2]$$

con lo cual la ecuación tiene una forma homogénea, en la que los tres puntos de ramificación aparecen igualmente de manifiesto.

El problema que tratamos de resolver se reduce, pues, ahora, a determinar las formas Φ_N, X_N, Ψ_N ; y para este fin vamos a relacionarlas con nuestra división de la esfera z . De la ecuación [2] se deduce inmediatamente que para $w=0$ es $\Phi_N(z_1, z_2)=0$; es decir, *al punto $w=0$ corresponden en la esfera z los N ceros de la forma Φ_N* . Por otra parte, según los convenios establecidos, *al punto de ramificación $w=0$ corresponden los centros de las caras del poliedro* (vértices b de la descomposición), de los cua-

les en todos los casos hay $\frac{3}{N}$, pero en cada punto de éstos concurren tres triángulos de cada una de las dos clases, representados simplemente sobre cada una de las semiesferas, luego dichos puntos deben contarse como *raíces triples* de la ecuación. Por consiguiente, estos puntos con la multiplicidad 3 dan todos los puntos $w=0$ que les corresponden y, por lo tanto, todos los ceros de Φ_N . Resulta, pues, que la forma Φ_N sólo tiene raíces triples y en consecuencia, debe ser el cubo de una forma $\varphi(z_1, z_2)$ de grado $\frac{N}{3}$:

$$\Phi_N = [\varphi_{N:3}(z_1, z_2)]^3;$$

de la misma manera se ve que al punto $w=1$ ó $w_1-w_2=0$ corresponden los ceros de $X_N=0$, y que éstos son idénticos con los $\frac{N}{2}$ puntos medios de las aristas (vértices c de nuestra descomposición) del poliedro contados como dobles; por lo tanto, X_N tiene que ser un cuadrado perfecto de una forma de dimensión $\frac{N}{2}$:

$$X_N = [\chi_{N:2}(z_1, z_2)]^2.$$

Finalmente, al punto $w=\infty$ corresponden los ceros de Ψ_N , que deben coincidir con los vértices del poliedro (vértices a de la descomposición); pero en éstos se reúnen en los distintos casos 3, 4 ó 5 triángulos, luego será:

$$\Psi_N = (\phi_{N:\nu}(z_1, z_2))^\nu, \quad \text{donde } \nu = 3, 4 \text{ ó } 5;$$

por consiguiente, la ecuación [2] debe tener, necesariamente, la forma:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi(z_1, z_2)^3 : \chi(z_1, z_2)^2 : \phi(z_1, z_2)^\nu \quad [3]$$

siendo los grados y exponentes de φ , χ , ϕ y los valores del grado N de la ecuación los que aparecen en la siguiente tabla:

$$\text{Tetraedro: } \varphi_4^3, \chi_6^2, \phi_4^3; N = 12.$$

$$\text{Octaedro: } \varphi_8^3, \chi_{16}^2, \phi_6^4; N = 24.$$

$$\text{Icosaedro: } \varphi_{20}^3, \chi_{30}^2, \phi_{12}^5; N = 60.$$

Vamos, ahora, a probar brevemente que también la *ecuación del diedro puede quedar incluida en el esquema* [3]. Recordemos para ello, simplemente, que en el caso del diedro habíamos colocado en la esfera w los tres puntos de ramificación en los puntos $-1, +1, \infty$ en lugar de hacerlo en los $0, +1, \infty$ como últimamente, de modo que para lograr una analogía completa, deberemos poner la ecuación del diedro bajo la forma :

$$w_1 + w_2 : w_1 - w_2 : w_2 = \Phi : \chi : \Psi.$$

Ahora bien, de la ecuación del diedro antes considerada (página 170) :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2 z_1^n z_2^n}$$

se deduce por una sencilla transformación :

$$w_1 + w_2 : w_1 - w_2 : w_2 = (z_1^{2n} + z_2^{2n} + 2 z_1^n z_2^n) : (z_1^{2n} + z_2^{2n} - 2 z_1^n z_2^n) : 2 z_1^n z_2^n = (z_1^n + z_2^n)^2 : (z_1^n - z_2^n)^2 : 2 (z_1 z_2)^n ;$$

por lo tanto, podemos, en efecto, agregar a la tabla de arriba :

$$\text{Diedro } \varphi_n^2, \chi_n^2, \psi^n, \quad N = 2n.$$

Los puntos singulares que inmediatamente se deducen de esta forma de la ecuación coinciden, así como sus respectivas multiplicidades, con los anteriormente señalados (pág. 171).

Tratemos ahora, ya, de la *obtención de las formas φ, χ, ψ en los tres nuevos casos*, fijándonos más detenidamente en el octaedro, caso el más sencillo, pero limitándonos, aun en él, a una rápida ojeada, y a veces a simples indicaciones y a enunciar los resultados finales, remitiendo al lector que quiera más pormenores sobre este asunto a nuestro libro el icosaedro, fácilmente comprensible.

Imaginemos, para mayor sencillez, el octaedro inscrito en la esfera z , de modo que *los seis vértices estén* (fig. 46) en

$$z=0, \infty, +1, +i, -i, -1.$$

Entonces las 24 *sustituciones lineales de z* que representan

las rotaciones del octaedro, es decir, que permutan entre sí los seis puntos nombrados, se obtienen con gran sencillez. Empecemos por las cuatro en las cuales quedan fijos los vértices 0 e ∞ :

$$z' = i^k z \quad (k=0, 1, 2, 3). \quad [4 a]$$

Además podemos llevar el punto 0 a coincidir con el ∞ por la sustitución $z' = \frac{1}{z}$, es decir, una rotación de 180° alrededor del eje horizontal $(+1, -1)$ que hace coincidir cada vértice del

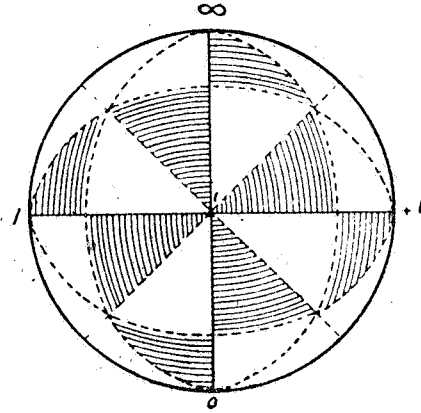


Figura 46

octaedro con otro, y aplicando nuevamente las cuatro rotaciones [4 a] se obtienen las cuatro nuevas sustituciones :

$$z' = \frac{i^k}{z} \quad (k=0, 1, 2, 3). \quad [4 b]$$

Asimismo podemos llevar sucesivamente a coincidir con el punto ∞ cada uno de los cuatro vértices $z=1, i, -1, -i$ aplicando las sustituciones respectivas :

$$z' = \frac{z+1}{z-1}, \quad \frac{z+i}{z-i}, \quad \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{z-i}{z+i},$$

que evidentemente hacen también coincidir unos con otros los seis vértices del octaedro y aplicando nuevamente en cada caso

las cuatro sustituciones [4 a] se obtienen otras $4 \cdot 4 = 16$ sustituciones del octaedro :

$$\begin{aligned} z' &= i^k \frac{z+1}{z-1}, & z' &= i^k \frac{z-1}{z+1} \\ z' &= i^k \frac{z+i}{z-i}, & z' &= i^k \frac{z-i}{z+i} \end{aligned} \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad [4c]$$

Hemos encontrado así todas las 24 sustituciones buscadas, y ahora se puede confirmar también directamente por el cálculo que *realmente llevan a coincidir el octaedro consigo mismo, y que forman un grupo G_{24}* , es decir, que efectuando sucesivamente dos sustituciones cualesquiera de ellas se obtiene nuevamente una de las [4].

Vamos a formar ahora, primero, la forma ψ_6 cuyos ceros, simples, son los seis vértices del octaedro: el punto $z=0$ da el factor z_1 , el punto $z=\infty$ el factor z_2 ; los cuatro puntos ± 1 y $\pm i$ son raíces simples de la forma $z_1^4 - z_2^4$; por consiguiente, será :

$$\psi_6 = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4). \quad [5a]$$

Más difícil es la construcción de las formas φ_8 y χ_{12} las cuales tienen por ceros simples los centros de las caras y los puntos medios de las aristas, respectivamente; sin tratar de deducirlas, nos concretaremos a escribirlas (1)

$$\begin{aligned} \varphi_8 &= z_1^8 + 14z_1^4 z_2^4 + z_2^8 \\ \chi_{12} &= z_1^{12} - 33z_1^8 z_2^4 - 33z_1^4 z_2^8 + z_2^{12}. \end{aligned} \quad [5a]$$

Quedan así determinadas las tres formas, salvo, naturalmente, un factor constante arbitrario para cada una. Por consiguiente, representando por φ_8 , ψ_6 y χ_{12} las formas tales como aparecen en las expresiones [5], habrá que introducir en la ecuación del octaedro [3] todavía dos constante indeterminadas c_1 y c_2 y podemos escribir :

$$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \varphi_8^3 : c_1 \chi_{12}^2 : c_2 \psi_6^4.$$

(1) Véase *Ikosaeder*, pág. 54.

Queda aun por determinar los valores de las constantes c de manera que estas dos ecuaciones representen realmente *una sola ecuación* entre z y w ; condición necesaria y suficiente para ello será que se verifique idénticamente en z_{12} y z_2 :

$$\varphi_8^3 - c_2 \psi_6^4 = c_1 \chi_{12},$$

y en efecto, hay valores constantes determinados de c_1 y c_2 que *satisfacen* esta condición como es fácil comprobar: efectuando las operaciones indicadas, se tiene la identidad:

$$\varphi_8^3 - 108 \psi_6^4 = \chi_{12}^2,$$

de modo que la ecuación [3] del octaedro será la suma:

$$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \varphi_8^3 : \chi_{12}^2 : 108 \psi_6^4. \quad [6]$$

Esta ecuación representa *los puntos* $w=0, 1, \infty$, *respectivamente, sobre los centros de las caras, los puntos medios de las aristas y los vértices del octaedro, con su correspondiente multiplicidad*, puesto que las formas φ, χ, ψ , ha nsido determinadas; además no se alteran aplicando las 24 sustituciones [4], puesto que éstas transforman los ceros de cada una de las formas φ, χ, ψ , en sí mismos, y, por consiguiente, no introducen otra alteración en las formas que un factor, y el cálculo muestra que estos factores desaparecen al formar los coeficientes que figuran en la ecuación [6].

Queda por probar todavía que la ecuación [6] realmente representa *de un modo conforme cada triángulo, rayado o no rayado, de la esfera z en el hemisferio anterior o posterior, respectivamente, de la esfera w* . Sabemos, ya que a los tres vértices de uno cualquiera de los triángulos corresponden los puntos $0, 1, \infty$ del meridiano real w ; y además, que la ecuación tiene 24 raíces z , para cada valor de w . Como estas raíces z tienen que distribuirse entre los 24 triángulos de la misma especie, dentro de cada triángulo no podrá tomar w un mismo valor más que una vez, a lo más. Si además demostrásemos que *w se conserva real a lo largo de los tres lados del triángulo* se podría deducir fácilmente que *cada lado está representado unívocamente sobre un segmento del meridiano real w* , y además, que *todo el interior*

de cada triángulo está representado conforme, sin cambio de sentido en los ángulos, y unívocamente sobre el hemisferio correspondiente. El lector podrá por sí mismo deducir esta cadena de conclusiones, haciendo uso de la continuidad y del carácter de analítica que posee la función representativa $w(z)$. Aquí nos concretaremos a la única parte de la demostración digna de ser notada: probar la realidad de w sobre los lados del triángulo.

La manera más cómoda de demostrar esta tesis es dándole la siguiente forma: *w es real en todos los círculos máximos resultantes de la descomposición del octaedro*. Estos son en primer lugar los tres círculos, perpendiculares entre sí, cada uno de los cuales pasa por cuatro de los seis vértices del octaedro, que corresponden a sus aristas (*círculos principales*; en la figura 46 se han dibujado de línea llena) y además los seis círculos que corresponden a las alturas de las caras del octaedro, los cuales bisecan los ángulos formados por los círculos principales (*círculos secundarios*, representados en la figura por líneas de trazos). Las sustituciones del octaedro permiten transformar cada círculo principal en cada otro principal, y lo mismo acontece con los círculos secundarios; basta, por consiguiente, probar que *la función w es real en todos los puntos de un círculo principal y en todos los de un círculo secundario*, puesto que en todos los demás debe entonces tomar aquellos mismos valores. Ahora bien, entre los círculos principales se encuentra el meridiano de los números reales z , y sobre él evidentemente es real el valor deducido de la [6]

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\varphi_8^3}{108 \psi_6^4},$$

puesto que φ y ψ son polinomios reales en z_1 y z_2 . Entre los círculos secundarios elegimos el que pasa por 0 y por ∞ ; éste forma con el meridiano real un ángulo de 45° , y, por consiguiente, sobre él toma z los valores $z = e^{\frac{i\pi}{4}} r$, donde r pasa por todos los valores reales desde $-\infty$ hasta $+\infty$; sobre él es, pues, siempre $z^4 = e^{i\pi} \cdot r^4 = -r^4$ real y puesto que, según [5], en φ_8 y en la cuarta potencia de ψ_6 sólo entran las cuartas potencias de z_1 y z_2 , también, según esta última fórmula, es w real.

Con esto llegamos ya al final de nuestra demostración: La ecuación [6] representa, en efecto, de un modo conforme los semiplanos de la esfera w o de una superficie de Riemann extendida sobre ella, sobre la descomposición triangular de la esfera z correspondiente al octaedro; y, por consiguiente, recíprocamente, conocemos geoméricamente la dependencia entre z y w establecida por esta ecuación de un modo tan completo como en los ejemplos anteriores.

Los casos del tetraedro y del icosaedro se tratan siguiendo exactamente el mismo método; damos aquí solamente los resultados, que se obtienen partiendo de la posición más sencilla posible de la división de la esfera z . Se obtiene como ecuación del tetraedro (*):

$$\begin{aligned} w_1 : w_1 - w_2 : w_2 &= [z_1 - 2 \sqrt{-3} z_1^2 z_2^2 + z_2^4]^3 \\ &: -12 \sqrt{-3} [z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4)]^2 \\ &: [z_1^4 + 2 \sqrt{-3} z_1^2 z_2^2 + z_2^4]^3 \end{aligned}$$

y como ecuación del icosaedro (*):

$$\begin{aligned} w_1 : w_1 - w_2 : w_2 &= [-(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10}]^3 \\ &: -[(z_1^{30} + z_2^{30}) + 522(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})]^2 \\ &: 1728 [z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})]^5 \end{aligned}$$

es decir, estas ecuaciones representan de un modo conforme las semiesferas w sobre los triángulos rayados y no rayados de las descomposiciones de la esfera z correspondiente al tetraedro y al icosaedro, respectivamente.

5. Sobre la resolución de las ecuaciones normales

Vamos a decir algo acerca de las propiedades comunes de las ecuaciones que hasta ahora hemos considerado como ejemplos de la teoría general desarrollada anteriormente, y que designaremos en lo que sigue con la denominación genérica de ecuaciones normales, limitándonos, naturalmente, siempre a los

(*) *Ikosaeder*, págs. 51 y 60.

(*) *L. c.*, págs. 56, 60.

casos más sencillos, y remitiendo al lector para más pormenores al libro sobre el icosaedro.

Observemos ante todo que la naturaleza extremadamente sencilla de todas las ecuaciones normales estriba en que el número de sustituciones lineales que las transforman en sí mismas es precisamente igual a su grado; es decir, que todas sus raíces son funciones lineales de una cualquiera de ellas, y que además las divisiones de la esfera ofrecen una imagen geométrica sumamente intuitiva de todas las relaciones que conviene considerar. El estudio de una cuestión derivada de la ecuación del icosaedro va a permitirnos apreciar la sencillez con que aquí aparecen cosas que en otras ecuaciones de grado tan elevado presentan grandes complicaciones.

Sea w_0 un valor real dado, situado, p. ej., en el cuadrante $(1, \infty)$ del meridiano real (fig. 47), y tratemos de averiguar las

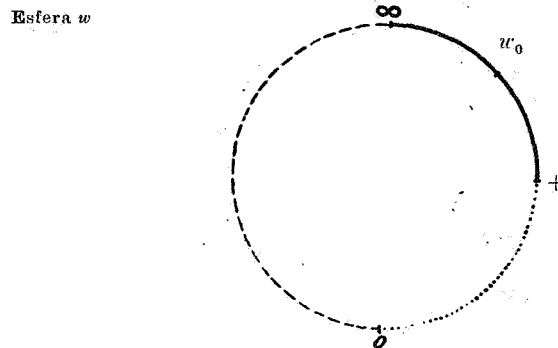


Figura 47

60 raíces de la ecuación del icosaedro correspondientes a $w=w_0$. Nuestra teoría de la representación hace ver inmediatamente que cada una de ellas tiene que encontrarse en uno de los 60 lados de los triángulos de la división de la esfera z (en la figura 45, los representados con línea llena) correspondiente al icosaedro. Con esto queda ya hecho lo que en la teoría de las ecuaciones se llama separación de las raíces, cosa que en la mayoría de los casos representa un fatigoso trabajo que ha de preceder al cálculo de las raíces, y constituye el problema de determinar intervalos distintos en cada uno de los cuales seguramente se encuentra una

sola raíz. Y no sólo esto, sino que podemos decir también, *cuántas de las 60 raíces son reales*. Para ello observemos que en la forma anteriormente indicada de la ecuación del icosaedro, se imagina el icosaedro colocado en tal posición respecto de la esfera z , que el meridiano real pasa por cada cuatro vértices de cada clase a , b y c ; luego (véase figs. 44 y 45) cuatro lados de línea llena de los triángulos caen en el meridiano real, y, por lo tanto, hay cuatro raíces reales. Lo mismo ocurre si w está en uno de los otros dos segmentos del meridiano real; luego, siempre, cualquiera que sea el valor real atribuido a w diferente de 0 , 1 , ∞ , la ecuación del icosaedro tiene cuatro raíces reales y 56 imaginarias; y cuando es $w=0$, 1 , ∞ , hay también cuatro raíces reales distintas, pero múltiples.

Vamos ahora a decir algo acerca del cálculo efectivo de las raíces de la ecuación normal. Ante todo debemos tener en cuenta que sólo necesitamos calcular una raíz de la ecuación; las demás se deducen de ésta por las sustituciones lineales; conviene, además, hacer observar que el cálculo numérico de una raíz constituye un problema propio del Análisis, no del Algebra, puesto que exige necesariamente la aplicación de un proceso indefinido si se quieren representar los valores generalmente irracionales de dichas raíces con aproximación dada.

Vamos a exponer con algún mayor detalle el ejemplo más sencillo que se puede poner, el de la ecuación binómica:

$$w = z^n,$$

con lo cual nuevamente nos ponemos en contacto inmediato con la matemática elemental; pues también en ella se trata esta cuestión — el cálculo de $\sqrt[n]{w}$ — al menos para los primeros valores de n y valores reales positivos de $w = r$. Los métodos para el cálculo de la raíz cuadrada y cúbica son conocidos al lector desde la escuela; se fundan en lo siguiente: Se busca el lugar que ocupa el radicando $w = r$ en la serie de los cuadrados o de los cubos de los números naturales $1, 2, 3, \dots$; recurriendo a la numeración decimal se hace la misma operación con las décimas del intervalo considerado, después con las centésimas, y así se continúa hasta lograr la exactitud pedida.

Aplicaremos aquí un procedimiento racional, en el que n puede tomar no sólo valores enteros, sino cualquier valor complejo de w . Puesto que sólo necesitamos determinar una solución de la ecuación, buscaremos, en especial el valor $z = \sqrt[n]{r}$ situado dentro del ángulo $\frac{2\pi}{n}$ contado a partir del eje real positivo. Como una generalización exacta del método elemental antes indicado, empezamos dividiendo dichos ángulos en un número ν , por ejemplo, de partes iguales (en la fig. 48, $\nu=5$); las rectas que lo di-

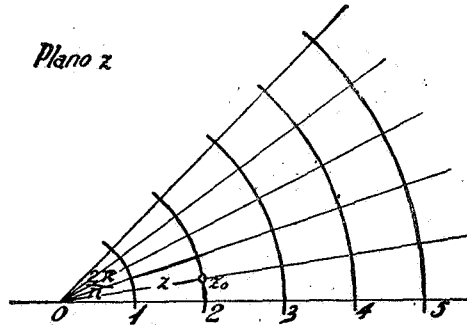


Figura 48

viden cortan a los círculos de centro 0 y radios enteros $z=1, 2, 3, \dots$, en puntos que, una vez fijado ν , son los

$$z = r \cdot e^{\frac{2i\pi}{n} \frac{k}{\nu}} \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1 \\ r = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

a los cuales corresponden los valores de w

$$w = z^n = r^n e^{2i\pi \frac{k}{\nu}}$$

que podemos señalar en seguida en el plano w , y son los vértices de una red correspondiente (fig. 49), pero que cubre todo el plano w , y se compone de los círculos de radios $1^n, 2^n, 3^n, \dots$, así como de las rectas que forman con el eje real los ángulos

$$0, \frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu}, \dots, \frac{(\nu-1)2\pi}{\nu}.$$

El valor dado, w , tiene que estar en el interior o en el contorno de alguna de las mallas de esta red; sea w_0 el vértice de esta malla más próximo a w . Un valor z_0 de $\sqrt[n]{w_0}$ es conocido como vértice de la red primitiva del plano z ; y el valor que buscamos es:

$$\begin{aligned} Z = \sqrt[n]{w} &= \sqrt[n]{w_0 + (w - w_0)} = \sqrt[n]{w_0} \sqrt[n]{1 + \frac{w - w_0}{w_0}} = \\ &= z_0 \left(1 + \frac{w - w_0}{w_0} \right)^{1/n} \end{aligned}$$

Desarrollando la potencia que figura en este último miembro por la fórmula del binomio de Newton generalizado, que supo-

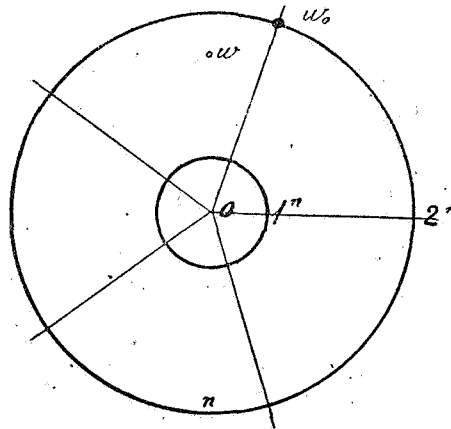


Figura 49

nemos conocida, pues de hecho estamos ya en el campo del Análisis, tendremos:

$$Z = z_0 \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{w - w_0}{w_0} + \frac{1 - n}{2n^2} \cdot \left(\frac{w - w_0}{w_0} \right)^2 + \dots \right).$$

La convergencia de esta serie se ve en seguida considerándola como el desarrollo tayloriano de la función analítica $\sqrt[n]{w}$ y aplicando la propiedad de que este desarrollo sólo es válido en el

círculo de centro w_0 que pasa por el punto singular más próximo a este punto. Resulta, entonces, que como \sqrt{w} no tiene otros puntos singulares que 0 e ∞ , este desarrollo es convergente siempre que w se halle en el interior del círculo de centro w_0 que pasa por el punto cero y sólo entonces; y esto lo podemos alcanzar siempre, partiendo de una red del plano z de mallas suficientemente estrechas. Pero para que la convergencia sea realmente buena, es decir, para que la serie sea prácticamente aplicable para el cálculo numérico es preciso, además, que $\frac{w-w_0}{u_0}$ sea suficientemente pequeño; lo que siempre se puede conseguir sin más que estrechar convenientemente las mallas de la red. Este procedimiento es muy recomendable para la ejecución práctica del cálculo numérico de una raíz.

Es digno de notar que la resolución numérica de las demás ecuaciones normales de los poliedros regulares no presenta en el fondo ninguna mayor dificultad que la del caso expuesto. Se aplica exactamente el mismo procedimiento arriba indicado a dichas ecuaciones, partiendo de la representación sobre la esfera w de dos triángulos contiguos, y aparecen entonces en lugar de la serie binómica otras series, también conocidas y de uso corriente en el Análisis, a saber: las series hipergeométricas. En un trabajo mío publicado el año 1877 en el tomo XII de *Mathematische Annalen* («*Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder*»), pág. 575 y sig.) se hace el estudio numérico de estas series (*).

6. Uniformización de las ecuaciones normales por medio de funciones trascendentes

Vamos a tratar todavía de otro método para la resolución de las ecuaciones normales, que se caracteriza por el empleo sistemático de funciones trascendentes. En él, en lugar de operar en cada caso particular con desarrollos en serie en el entorno de una solución conocida, se representan de una vez para siempre los pares de valores w y z que satisfacen a la ecuación, por medio

(*) Véase también: Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, tomo II, pág. 331 y siguientes.

de funciones analíticas uniformes de una variable auxiliar, o, como suele decirse, se uniformizan las irracionalidades definidas por la ecuación. Si así se llega a funciones que se pueden tabular fácilmente o de las que ya se tienen construídas tablas numéricas, entonces puede obtenerse la *solución numérica de la ecuación sin nuevos trabajos calculatorios*. Voy a tratar con tanto mayor gusto de esta utilización de las funciones trascendentes cuanto que en la enseñanza secundaria se recurre a ellas en algunos casos, pero de un modo poco claro, casi misterioso; la razón de ello estriba en estar todavía apegados a concepciones antiguas e incompletas en cosas que la moderna teoría de funciones de variable compleja hace tiempo que ha aclarado totalmente.

Vamos a aplicar estas indicaciones generales, en primer término al caso de la *ecuación binómica*. Ya en la segunda enseñanza la solución positiva $r=z^n$, para r real y positivo, se calcula

logarítmicamente poniéndola bajo la forma $z=e^{\frac{\log r}{n}}$ y tomando para $\log r$ el valor principal positivo del logaritmo. Las tablas de logaritmos nos dan este valor, y luego, inversamente, el valor de z como «número» o antilogaritmo de $\frac{\log r}{n}$, si bien se emplea ordinariamente 10 como base en lugar de e . Esta solución se generaliza inmediatamente a valores complejos; la ecuación:

$$z^n = w$$

se resuelve introduciendo x como logaritmo complejo general de w y expresando w y z como funciones analíticas uniformes de x :

$$w = e^x \quad z = e^{\frac{x}{n}}$$

De este modo, teniendo en cuenta la multiformidad de $z = \log w$ (más adelante hablaremos de modo más preciso de esta función) resultan, en efecto, para un mismo valor de w , n valores de z .

La variable x se denomina *variable uniformizante*.

Ahora bien, como nuestras tablas sólo contienen los *logaritmos reales de los números reales*, parece que no puede obtenerse numéricamente de un modo inmediato la solución indicada; pero con el análisis de algunas sencillas propiedades de los logaritmos,

puede reducirse el cálculo al empleo de cualesquiera tablas trigonométricas corrientes.

En efecto, poniendo

$$w = u + iv = \sqrt{u^2 + v^2} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} i \right],$$

el primer factor, como número real y positivo, tiene un logaritmo real; el segundo, como magnitud de valor absoluto 1, tiene un logaritmo imaginario puro $i\varphi$ (esto es, el segundo factor es $e^{i\varphi}$) y φ se calcula por medio de las relaciones:

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \operatorname{sen} \varphi. \quad [a]$$

Resulta, pues,

$$x = \log w = \log \sqrt{u^2 + v^2} + i\varphi;$$

y, por lo tanto, como raíz de la ecuación:

$$z = e^{\frac{x}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log \sqrt{u^2 + v^2}} e^{\frac{1}{n} i\varphi},$$

es decir,

$$z = \sqrt[n]{u + iv} = e^{\frac{1}{n} \log \sqrt{u^2 + v^2}} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{n} \right). \quad [b]$$

Puesto que φ está determinado, salvo un múltiplo de 2π , esta fórmula da también todos los n valores de las raíces, y ahora ya se puede determinar con auxilio de las tablas de logaritmos naturales y trigonométricas: primero φ , por medio de las fórmulas (a), y después z , utilizando la fórmula (b). Hemos obtenido esta «solución trigonométrica» de un modo completamente natural, partiendo de los logaritmos de los números complejos; pero si se supone que no se conocen estos logaritmos y se quiere, sin embargo, deducir esta solución trigonométrica—que es lo que suele hacerse en la enseñanza secundaria—por fuerza tiene que aparecer tal solución como algo completamente extraño e incomprensible.

Ahora bien, hay un punto en la enseñanza de la matemática elemental en que se presenta la necesidad de extraer raíces de números no reales: la llamada *fórmula cardánica de resolución de las ecuaciones de tercer grado*; y sobre ella vamos a hacer algunas observaciones. Dada la ecuación cúbica en su forma reducida:

$$x^3 + px - q = 0, \quad [1]$$

la fórmula de Cardan dice que sus tres raíces x_1 , x_2 y x_3 están contenidas en la siguiente expresión:

$$x \equiv \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad [2]$$

Puesto que cada uno de estos radicales cúbicos tiene tres valores, resultan para la expresión nueve valores diferentes, en general; entre ellos se determinan x_1, x_2, x_3 por la propiedad de ser *el producto de los dos radicales cúbicos que en cada uno de ellos intervienen igual a $-\frac{p}{3}$* . Ahora bien; si se sustituyen los coeficientes de la ecuación por sus expresiones como funciones simétricas de x_1, x_2 y x_3 y se tiene en cuenta que el coeficiente de x^2 es $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, resulta:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2}{108},$$

es decir, el radicando del radical cuadrático es, salvo un factor negativo, igual al discriminante de la ecuación; de donde se deduce inmediatamente que dicho radicando es negativo cuando las tres raíces son reales, y positivo cuando una raíz es real y las otras dos imaginarias conjugadas. Resulta, pues, que precisamente en el caso aparentemente más sencillo de una ecuación cúbica, el de que las tres raíces sean reales, la fórmula de Cardan exige extraer una raíz cuadrada de un número negativo, y después una raíz cúbica de un número complejo.

Esta marcha a través del campo complejo tenía que parecer a los antiguos algebristas de aquel tiempo en que se estaba muy lejos de la teoría de los números complejos—; unos 250 años an-

tes de que Gauss diese su interpretación geométrica en el plano complejo!—algo completamente imposible.

Se hablaba del «*Casus irreducibilis*» de la ecuación cúbica y se decía que en él la solución dada por la fórmula de Cardan carecía de sentido; y cuando más tarde se descubrió que *precisamente en este caso existe una relación sencilla entre la ecuación cúbica y la trisección del ángulo* y en sustitución de la fórmula de Cardan, que había caído en defecto, se obtuvo una «*solución trigonométrica*» en el campo real, se creyó haber encontrado algo completamente nuevo que no guardaba la menor relación con aquella fórmula. En este lamentable estado hállese, por desgracia, todavía hoy la enseñanza elemental.

En contraposición a esto debemos hacer notar señaladamente que *la solución trigonométrica no es otra cosa que la aplicación del procedimiento algorítmico general antes expuesto para el cálculo de las raíces de cantidades complejas*; por esta razón resulta de un modo completamente natural cuando, al calcular numéricamente la fórmula de Cardan, en el caso de ser complejo el radicando del radical del tercer grado, se hace una transformación tan sencilla como la que en la enseñanza elemental se emplea cuando los radicandos son reales. En el caso que nos ocupa, se procede del siguiente modo. Suponemos que es

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

para lo cual, siendo q real, es necesario que sea $p < 0$. Poniendo el primer radical cúbico que aparece en [2] bajo la forma:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i \left| \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \right|},$$

se ve que su valor absoluto, como raíz cúbica positiva del valor absoluto $\left| \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \right|$ del radicando, es $\left| \sqrt{\frac{-p}{3}} \right|$; pero como su producto por el segundo radical cúbico debe ser igual a $\frac{p}{3}$, el valor de este segundo radical tiene que ser siempre *conjugado*:

del valor del primero, y la suma de ambos, solución de la ecuación cúbica, es, por lo tanto, sencillamente el doble de su parte real :

$$x_1, x_2, x_3 = 2 R \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \right).$$

Aplicemos ahora exactamente el mismo procedimiento general de la página 199. Escribiremos el radicando, sacando factor común su módulo, en la forma :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{27}} \left[\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} + i \frac{\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} \right]$$

y determinaremos un ángulo φ por las ecuaciones :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}},$$

y entonces la raíz cúbica buscada, teniendo en cuenta que la raíz cúbica positiva de $\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}$ es $\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}$, será :

$$\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \text{sen } \frac{\varphi}{3} \right),$$

obteniendo, por consiguiente, si se observa que φ está determinado, salvo un múltiplo de 2π :

$$x_k = 2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \quad (k = 0, 1, 2)$$

que es, exactamente, la forma usual de la solución trigonométrica.

Permítasenos con este motivo una breve digresión sobre la

expresión «*Casus irreducibilis*». Se usa aquí el calificativo «irreducible» en un sentido completamente diferente al en que hoy generalmente se emplea y frecuentemente hemos utilizado en estas lecciones; se quiere expresar con él que la solución de la ecuación cúbica no puede reducirse a radicales cúbicos de números *reales*, lo cual no tiene la menor relación con la moderna significación de este adjetivo. Se deja ver claramente cómo en esta región de la matemática, esta desgraciada denominación así como el temor tan generalizado que inspiran los números complejos, dan origen a la posibilidad, al menos, de equívocos e incomprendimientos; vivamente deseo que estas observaciones más contribuyan a evitar que tales errores subsistan y se propaguen.

Veamos, ahora, siquiera sea brevemente, *cómo se llega a la uniformización de las otras ecuaciones normales, valiéndose de funciones trascendentes.*

Sea, en primer lugar, la ecuación del diedro

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Poniendo $w = \cos \varphi$, la aplicación de la fórmula de Moivre hace ver que la ecuación se satisface idénticamente por el valor

$$z = \cos \frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{n}.$$

Como todos los valores $\varphi + 2k\pi$ y $2k\pi - \varphi$ dan el mismo valor w , esta fórmula da, en efecto, para cada valor de w , $2n$ raíces z , que podemos escribir:

$$z = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Para las ecuaciones del octaedro, tetraedro e icosaedro, no bastan ya estas funciones trascendentes «elementales», pero se obtiene una solución completamente análoga utilizando las funciones elípticas modulares.

Aunque esta solución sale de los límites de la matemática elemental, vamos a indicar, sin embargo, la fórmula correspon-

diente para el icosaedro, al menos (*). Estas fórmulas guardan una íntima relación con la resolución general de la ecuación de quinto grado por medio de funciones elípticas, de la cual sólo se hacen ligerísimas indicaciones en los libros y sobre la que más adelante añadiremos algunas palabras aclaratorias. La ecuación del icosaedro tenía la forma (pág. 186)

$$w = \frac{\varphi_{20}(z)^3}{\psi_{12}(z)^5}$$

Identificando ahora w con el *invariante absoluto*, J , de la teoría de las funciones elípticas, y considerando éste como función del cociente de periodos $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (en la notación de Jacobi $\frac{ik'}{k}$); es decir, poniendo:

$$w = J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}$$

donde g_2 y Δ son ciertas formas transcendentales de dimensiones -4 y -12 , respectivamente, en ω_1 y ω_2 , que desempeñan un importante papel en la teoría de las funciones elípticas. Introduciendo la notación abreviada de Jacobi, de uso general,

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\pi \frac{k'}{k}},$$

las raíces z de la ecuación del icosaedro vendrán expresadas por el siguiente cociente de las funciones θ de Jacobi

$$z = -q^{\frac{3}{5}} \frac{\theta_1(2\pi\omega_1, q^5)}{\theta_1(\pi\omega_1, q^5)}$$

Teniendo en cuenta, que la función $\omega(w)$ deducida de la primera ecuación es infinitiforme, se demuestra que esta fórmula da para un mismo valor de w precisamente todas las 60 raíces de la ecuación del icosaedro.

(*) *Mathem. Annalen*, tomo XIV, pág. 111 y siguientes. Klein, *Gesammelte mathem. Abhandlungen*, tomo III, pág. 13 y siguientes. *Icosaeder*, página 131.

7. Resolubilidad por radicales

Hasta ahora nada hemos dicho de una interesante cuestión de la teoría de las ecuaciones normales, a saber :

¿Aportan esta clase de ecuaciones algebraicas algo realmente nuevo, o pueden reducirse a otras y, en particular, a una sucesión de ecuaciones binómicas? En otros términos : ¿No se podrá expresar la solución, z , de las ecuaciones, en función de w , por medio de un número finito de radicales superpuestos?

En lo que respecta a las *ecuaciones del diedro, tetraedro y octaedro*, la teoría algebraica permite reconocer fácilmente que, en efecto, *pueden reducirse a ecuaciones binómicas*. Fijándonos en el caso de la *ecuación del diedro*:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w$$

basta poner

$$z^n = \zeta$$

y la ecuación se transforma en la

$$\zeta^2 - 2w\zeta + 1 = 0,$$

de la cual se deduce inmediatamente :

$$\zeta = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

y, por lo tanto,

$$z = \sqrt[n]{w \pm \sqrt{w^2 - 1}},$$

con lo cual se obtiene la solución buscada en función de radicales.

*Por el contrario, para la ecuación del icosaedro no es posible encontrar una solución que sólo dependa de radicales; por consiguiente, esta ecuación define una función algebraica esencialmente nueva. Una demostración muy intuitiva, original mía, publicada en el tomo 61 (1905) de *Mathem. Annalen* (*) se basa*

(*) Págs. 69-371 : «Beweis für die Nichtauflösbarkeit des Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen». Puede verse también en : Klein : *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, tomo II, pág. 385.

en la consideración de la formación teóricofuncional ya explicada de la función icosaédrica $z(w)$. Lo único que se necesita suponer conocido es el siguiente *léma de Abel*, cuya demostración puede verse en cualquier Tratado de Algebra: *Si una ecuación se puede resolver por una sucesión finita de radicales, todo radical que en ésta aparezca se puede expresar como función racional de las n raíces de la ecuación dada.*

Apliquemos éste al caso especial de la ecuación del icosaedro. *Supuesto que su raíz, z , venga expresada por una serie de radicales que recaen sobre los coeficientes de la ecuación, es decir, sobre funciones racionales de w (vamos a demostrar que esta hipótesis conduce a una contradicción), todo radical que en la fórmula aparece debería ser igual a una función racional de las 60 raíces*

$$R(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{60}).$$

Como todas las raíces de la ecuación del icosaedro se deducen de una de ellas por sustituciones lineales, podemos reemplazar esta última expresión sencillamente por *una función racional $R(z)$ de z solamente*. Consideremos ahora esta $R(z)$ como función de w , poniendo en lugar de z los 60 valores de la función icosaédrica $z(w)$. Puesto que todo circuito en el plano w , que haga volver z a su valor del punto de partida, necesariamente hace que también $R(z)$ vuelva a tomar su valor primitivo, $+R[z(w)]$ sólo podrá tener puntos de ramificación en los $w=0, 1, \infty$ en que también los tiene $z(w)$, y el número de las hojas de la superficie de Riemann que vienen a reunirse en ciclo en cada uno de estos puntos debe ser un divisor del número correspondiente a $z(w)$, el cual, como sabemos, es igual a 3, 2, 5, respectivamente. *Toda función racional $R(z)$ de una raíz del icosaedro y, por lo tanto, todo radical que aparezca en la supuesta fórmula de resolución se puede mirar, por consiguiente, como función de w , si sólo tiene de ramificación los puntos $w=0, w=1, w=\infty$; y en este caso se reúnen en los puntos 0, 1 e ∞ , tres, dos y cinco hojas, respectivamente, de su superficie de Riemann, puesto que 3, 2, 5, no admiten ningún divisor común fuera de la unidad.*

Veamos, ahora, cómo puede encontrarse una proposición en contradicción con ésta. Para ello consideremos el *radical más interior* que figura en la expresión hipotética de $z(w)$.

El radicando correspondiente a este radical será, pues, siempre una función racional $P(w)$ y el índice del radical, p , se puede suponer primo, puesto que cualquier radical puede considerarse como compuesto de radicales superpuestos, de índices primos. Además, $P(w)$ no puede ser ninguna potencia p -ésima de una función racional $\rho(w)$, pues de otro modo sería nuestro radical superfluo, y podríamos aplicar nuestro razonamiento al siguiente radical realmente necesario.

Veamos, ahora, qué clase de ramificaciones puede poseer la función $\sqrt[p]{P(w)}$; para ello, lo más cómodo es escribirla en coordenadas homogéneas:

$$P(w) = \frac{g(w_1, w_2)}{h(w_1, w_2)},$$

siendo g, h , formas de igual dimensión de las variables homogéneas w_1, w_2 , $(w = \frac{w_1}{w_2})$. Según el teorema fundamental del Algebra podemos descomponer g y h en factores lineales, y será:

$$P(w) = \frac{l^\alpha m^\beta n^\gamma \dots}{l'^{\alpha'} m'^{\beta'} n'^{\gamma'} \dots}$$

debiendo verificarse, por la igualdad de dimensiones del numerador y denominador:

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = \alpha' + \beta' + \gamma' + \dots$$

Ahora bien, todos los exponentes $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ no pueden ser divisibles por p , puesto que entonces P sería una potencia perfecta de grado p , y como además la suma $\alpha + \beta + \dots - \alpha' - \beta' - \dots$ es igual a cero, y divisible, por lo tanto, por p , no podrá ocurrir que sólo uno de estos números no sea divisible por p , sino que tendrá que haber dos, por lo menos, que tengan esta propiedad. Los ceros de los factores lineales correspondientes deben ser, por consiguiente, los dos puntos de ramificación de $\sqrt[p]{P(w)}$, en cada uno de los cuales hay p hojas que se unen en ciclo. Esta consecuencia constituye la contradicción buscada con la proposición antes mencionada también aplicable a $\sqrt[p]{P(w)}$; y, en efecto, habíamos ya

enumerado todas las ramificaciones posibles y entre ellas no hay dos en las que se unan el mismo número de hojas. Resulta, pues, que la hipótesis hecha es falsa y, por consiguiente, *la ecuación del icosaedro es irresoluble por radicales.*

Esta demostración se basa esencialmente en que los números característicos del icosaedro, 3, 2, 5, son primos entre sí. Si tuvieran un divisor común, como ocurre con los números 3, 2 y 4 del octaedro, podría haber funciones racionales $R[z(w)]$ que en dos puntos presenten igual clase de ramificación, por ejemplo, una función con dos hojas que se unen en cada uno de los puntos 1 y ∞ , y éstos pueden, entonces, expresarse realmente como raíces de una función racional $P(w)$. Por esto, en el caso del octaedro como en el tetraedro (con los números 3, 2, 3) y en el del diedro (2, 2, n), su ecuación es resoluble por medio de radicales.

Estos resultados nos dan ocasión para formular, con carácter general, una observación, a saber: la escasa relación que el tecnicismo, generalmente usado entre las gentes que se ocupan con la matemática, guarda con los progresos de la ciencia. Se emplea hoy la palabra «raíz», casi generalmente, en dos sentidos diferentes: uno, para designar la solución de cualquier ecuación algebraica, y otro, más particular, para la de una ecuación binómica. Este último uso, aun procede, naturalmente, de una época en que no se consideraban otras ecuaciones que las binomias; pero el continuarlo hoy, si no precisamente perjudicial, por lo menos es inconveniente; véase, por ejemplo, lo que ocurre al decir: las «raíces» de una ecuación no son expresables por «radicales». Todavía hay otra frase que se presta a mayores confusiones y que se repite desde los comienzos del Algebra, a saber: *las ecuaciones algebraicas que no se pueden resolver por medio de radicales, es decir, no reducibles a ecuaciones binómicas, «no son algebraicamente resolubles».* Esto se encuentra en la más flagrante contradicción con la moderna significación del calificativo «algebraico». Hoy se debe decir que una ecuación es resoluble algebraicamente, cuando se puede reducir a una cadena de ecuaciones, lo más sencillas posibles, en las cuales se pueda ver de modo tan completo la dependencia funcional de sus soluciones respecto de sus parámetros, con conexiones entre sus diferentes raíces, etc., como desde antiguo ocurre en las ecuaciones bi-

nómicas, aunque no es preciso que aquéllas sean de esta misma clase. En este sentido puede decirse que la ecuación del icosaedro es resoluble algebraicamente; pues las consideraciones hechas anteriormente, muestran con toda precisión que se puede construir su teoría de un modo que satisface plenamente a todas las exigencias. El hecho de no ser resoluble por medio de radicales hace que, por el contrario, tenga un especial interés, puesto que así aparece como ecuación normal apropiada, a la cual se tratará de reducir otras ecuaciones que tampoco son resolubles algebraicamente, según el concepto antiguo, para poder darnos cuenta completamente de su solución.

Esta observación nos conduce ahora al examen de esta cuestión, que constituirá la última parte de este capítulo.

8. Reducción de las ecuaciones generales a ecuaciones normales

Se demuestra que pueden reducirse: la ecuación general de tercer grado a la ecuación del diedro para $n=3$; la de cuarto grado a la del tetraedro u octaedro; y la de quinto grado a la del icosaedro. Este resultado es el triunfo más reciente de los poliedros regulares, que desde el principio de la historia de las matemáticas han desempeñado siempre un importante papel y que ahora han intervenido en los más diversos campos de la moderna Matemática.

Para mejor fijar las ideas y hacer más comprensible el sentido de esta afirmación general, vamos a fijarnos en el caso de la ecuación de tercer grado, aunque sin pretender demostrar las fórmulas con todo detalle. Supondremos escrita la ecuación cúbica en la forma reducida:

$$x^3 + px - q = 0 \quad [1]$$

Sean x_1, x_2 y x_3 sus soluciones; tratemos de formar una función racional z de éstas, tal que al efectuar las seis permutaciones entre ellas, la función experimente las seis sustituciones lineales del diedro para $n=3$, es decir, tome los valores

$$z, \quad \varepsilon z, \quad \varepsilon^2 z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{\varepsilon}{z}, \quad \frac{\varepsilon^2}{z} \quad \left(\text{donde } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}} \right).$$

Se ve fácilmente que

$$z = \frac{x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3}{x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3} \quad [2]$$

satisface a estas condiciones. La función diédrica, $z^3 + \frac{1}{z^3}$, de estas magnitudes debe quedar invariable para *todas* las permutaciones de las x , puesto que las seis sustituciones lineales de z la dejan invariable; por consiguiente, en virtud de un conocido teorema de Algebra, puede expresarse como función racional de los coeficientes de la [1]; y, en efecto, el cálculo da:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -27 \frac{q^2}{p^3} - 2. \quad [3]$$

Recíprocamente, si se ha resuelto esta ecuación del diedro y z es una de sus raíces, la relación [2] junto con las

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p, \quad x_1 x_2 x_3 = q,$$

permite obtener los tres valores x_1 , x_2 y x_3 en función racional de z , p y q ; se encuentra así:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{z(1+z)}{1+z^3} \\ x_2 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon z(1+\varepsilon z)}{1+z^3} \\ x_3 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon^2 z(1+\varepsilon^2 z)}{1+z^3} \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

Resuelta, pues, la ecuación del diedro [3], estas fórmulas dan inmediatamente la solución de la ecuación cúbica [1].

De un modo completamente semejante, se opera la reducción de las ecuaciones generales de cuarto y quinto grado. Las ecuaciones resultantes tienen forma más complicada, naturalmente, pero en esencia no más difíciles; la única diferencia está en que el parámetro w de la ecuación normal, que antes se expresaba racionalmente en función de los coeficientes de la ecua-

ción ($2w = -27 \frac{q^2}{p^3} - 2$), ahora contiene *radicales cuadráticos*.

El lector podrá hallar esta teoría para la ecuación de quinto grado en sus relaciones con el icosaedro, expuesta detalladamente en la segunda parte de mis lecciones sobre el icosaedro, en la cual no sólo aparecen calculadas las fórmulas, sino explicadas con toda precisión las razones por las cuales se logra llegar a las ecuaciones buscadas.

Permitásenos, por último, una palabra sobre *la relación entre estos desarrollos y la teoría ordinaria de las ecuaciones de tercero, cuarto y quinto grado*. En lo que se refiere a las soluciones ordinarias de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, pueden obtenerse de nuestras fórmulas, con transformaciones apropiadas, utilizando la solución, por medio de radicales, de las ecuaciones del diedro, octaedro y tetraedro.

En cuanto a las *ecuaciones de quinto grado*, la mayor parte de los libros se limitan, por desgracia, a establecer el resultado negativo de que no pueden resolverse por una serie de *radicales*, y, cuando más, agregan simplemente la obscura indicación de que es posible su solución por medio de *funciones elípticas* (mejor dicho sería: funciones modulares elípticas). Es de lamentar esta expresión que antes dificulta que favorece la exacta comprensión del problema. En efecto, resumiendo lo que hemos visto en esta rápida ojeada, cuando distinguimos en el problema la parte algebraica y la analítica podemos decir:

1.º *La ecuación general de quinto grado no puede reducirse a ecuaciones binómicas, pero siempre se logra, y éste es el problema característico de la solución algebraica, su reducción a la ecuación del icosaedro como la más sencilla ecuación normal.*

2.º *La ecuación del icosaedro se puede resolver por medio de funciones modulares elípticas, resultando así un procedimiento de cálculo numérico análogo a la solución de las ecuaciones binómicas por medio de logaritmos.*

Con esto queda completa la solución del problema de la ecuación de quinto grado. Se ve bien, con este ejemplo, que el matemático, cuando siguiendo el camino ordinario no llega a la solución del problema que le ocupa, no debe resignarse a establecer la imposibilidad, sino que debe llegar al punto en que radica el

fondo de la dificultad y tratar de superarla. El pensamiento matemático, como tal, no tiene límites ; así, cuando alguien opina que en un cierto punto una cuestión sale del terreno matemático, es seguro que allí empieza lo realmente interesante de la solución del problema.

Señalaremos, por último, que estas teorías no terminan con la ecuación de quinto grado, sino que *pueden establecerse propiedades en todo análogos para las ecuaciones de sexto grado y grados superiores*, con tal de que se recurra a *las figuras análogas a los cuerpos regulares en espacios multidimensionales*.

El lector que quiera informarse con más detalles sobre este punto puede consultar mi Memoria : «*Über die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften und sechsten Grades*» (1) y los trabajos de P. Gordan (2) y A. B. Coble (3), con ella relacionados. En este último, toda la exposición aparece notablemente simplificada.

(1) *Journal für reine und angewandte Mathematik*, tomo 129 (1905) pág. 151 y sig. ; y *Mathematischen Annalen*, tomo 61 (1905), pág. 50 y siguientes. También Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, tomo II, pág. 502 y 503.

(2) *Math. Ann.*, tomo 61 (1905), pág. 50 y tomo 68 (1910), pág. 1.

(3) *Math. Ann.*, tomo 70 (1911), pág. 337.